ORSAY
n° d'ordre : 3266

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée
pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR 3ÈME CYCLE

SPÉCIALITÉ : MATHEMATIQUES STATISTIQUES

par

MESBAH MOUNIR

SUJET : COMPARAISON DES EFFETS FIXES DANS UN MODELE MIXTE DESEQUILIBRE

soutenue le 22 Septembre 1982 devant la Commission d'examen

MM. DACUNHA-CASTELLE *Président*
DUCIMETIERE
COURSOL

ORSAY
n° d'ordre :

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée
pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR 3ÈME CYCLE

SPÉCIALITÉ : MATHEMATIQUES STATISTIQUES

par

MESBAH MOUNIR

SUJET : COMPARAISON DES EFFETS FIXES DANS UN MODELE MIXTE DESEQUILIBRE

soutenue le 22 Septembre 1982 devant la Commission d'examen

MM. DACUNHA-CASTELLE *Président*
DUCIMETIERE
COURSOL

UNIV.
LEIDEN
BIB.

Mes remerciements,

A Monsieur J. LELLOUCH, qui m'a accueilli dans son Unité de Recherche et permis la réalisation de ce travail

A Monsieur P. DUCIMETIERE, qui m'a proposé le sujet de cette thèse et qui m'a beaucoup aidé par ses conseils amicaux et un soutien constant

A Monsieur P. MYQUEL, pour l'aide efficace dans la partie informatique de ce travail

A Mademoiselle D. SALOMON, qui m'a dactylographié cette thèse

A tous les membres de l'Unité 169 de l'INSERM, qui m'ont reçu avec gentillesse parmi eux.

-_-_-_-_-_-_-

PLAN

I - INTRODUCTION

II - MODELE STATISTIQUE ET TESTS HABITUELS OBTENUS PAR ANALOGIE AU CAS EQUILIBRE

III - TESTS BASES SUR LES ESTIMATIONS DES MOYENNES DANS LES GROUPES

IV - TEST PROPOSE

V - CAS DES GRANDS ECHANTILLONS

VI - COMPARAISON PAR SIMULATION DU TEST PROPOSE AVEC LES TESTS HABITUELS

VII - BIBLIOGRAPHIE

I - INTRODUCTION

En épidémiologie, dans la planification d'un essai de traitement, on est parfois amené à utiliser un plan en blocs randomisés où les unités d'un même bloc reçoivent le même traitement.

Par exemple, un essai récemment réalisé (l'essai Parisien de Prévention Cardiovasculaire, Cambien (10) avait pour but d'étudier l'effet de conseils de prévention sur le niveau de facteurs de risque cardiovasculaire (obésité, consommation de cigarettes, etc ...) dans une population d'adultes jeunes travaillant dans une même administration. Pour éviter les "contagions" (entre témoins et traités) il a été décidé que les sujets d'un même "service" recevraient les conseils de prévention ou ne les recevraient pas (groupe "traités" ou groupe "témoins").

De la même façon, il est possible d'envisager des études d'intervention par exemple dans le domaine nutritionnel, dont les blocs sont constitués de familles. Leurs effectifs sont généralement inégaux. On retrouve ce schéma expérimental dans divers autres domaines des sciences humaines ou biologiques.

Quand les effectifs des blocs sont égaux, l'analyse statistique (comparaison des moyennes, ou estimations des différents paramètres) ne pose aucun problème, même si les tests utilisés sont moins puissants que ceux qu'on aurait fait si la randomisation était faite sur les sujets et non les blocs (voir Cornfield (14)).

Lorsqu'ils sont inégaux on ne sait pas construire de test de comparaison de moyennes qui soit exact et à fortiori optimal.

Il peut arriver également que dans une expérimentation avec blocs équilibrés, l'existence de "données manquantes" conduise à un déséquilibre, il est néanmoins généralement faible et dans ce cas les "données manquantes" peuvent être estimées. Ceci n'a évidemment plus de sens lorsque le déséquilibre est inhérent à l'expérimentation elle-même.

Dans ce travail, les différentes méthodes d'analyse rencontrées dans la littérature sont inventoriées :

1 - Méthodes classiques issues du tableau d'analyse de variance et conduisant à des tests valables dans le cas équilibré ;

.../..

2 - Méthodes construites à partir d'estimateurs de la moyenne dans chaque groupe.

Une approche différente est proposée : on construit le test optimal dans le cas où le paramètre nuisible du problème est connu (intensité de "l'effet blocs") puis on substitue un estimateur du paramètre nuisible dans le test construit pour obtenir un test approché.

Dans le chapître V nous mettons en évidence des propriétés asymptotiques de ce test dans le cas ou le "plan asymptotique" a été obtenu par duplication d'un plan de base.

Dans le chapître VI nous étudions le comportement (exactitude et puissance) du test proposé à l'aide de simulations. A cet effet nous proposons une mesure du déséquilibre d'un plan, qui, dans une certaine mesure, peut nous permettre de généraliser les résultats obtenus à des plans "équivalents" à ceux simulés.

II - MODELE STATISTIQUE ET TESTS HABITUELS OBTENUS PAR ANALOGIE AU CAS EQUILIBRE.

II.1 - MODELE ET RAPPELS STATISTIQUES

II.1.1. MODELE

II.1.2. ESTIMATION DES COMPOSANTES DE VARIANCES

II.1.2.1. METHODES D'HENDERSON

II.1.2.2. METHODES DE C.R. RAO

II.1.2.3. ESTIMATEURS DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

II.1.2.4. EXISTE-T-IL UNE STATISTIQUE EXHAUSTIVE MINIMALE COMPLETE ?

II.2 - TESTS FONDES SUR LE TABLEAU D'A N O V A

II.2.1. ANALYSE DANS LE CAS EQUILIBRE

II.2.2. TESTS CLASSIQUES DU CAS EQUILIBRE

II.2.2.1. TEST F APPROCHE

II.2.2.2. QUASI F-TEST

II.1 - Modèle et rappels statistiques

II.1.1. - Modèle

On se restreint au cas le plus simple de comparaison de deux traitements (témoins, traités). La généralisation à plus de deux traitements ne pose pas de problème particulier. Le modèle s'écrit :

$$Y_{ijk} = t_i + \beta_{ij} + E_{ijk} \qquad i = 1, 2 \; ; \; j = 1 \ldots m_i \; ; \; k = 1 \ldots n_{ij}$$

t_i représente l'effet fixe du au traitement i : $E(t_i) = t_i$ Var $t_i = 0$.
β_{ij} est l'effet du au bloc j du traitement i. $E(\beta_{ij}) = 0$ et Var $\beta_{ij} = \sigma^2_b$.
Les β_{ij} sont indépendants, i = 1, 2 ; j = 1 ... m_i. E_{ijk} est l'erreur résiduelle. $E(E_{ijk}) = 0$ et Var $(E_{ijk}) = \sigma^2$.

Vectoriellement le modèle s'écrit :

$$Y = X_t T + X_b \ddot{B} + E$$

avec :

$$\underset{2\times 1}{T} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \quad ; \quad X_t = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{n_{10}} & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{n_{20}} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{2} + \mathbb{1}_{n_{i0}}$$

$$\underset{m_0\times 2}{\ddot{B}} = \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \vdots \\ \beta_{ij} \\ \vdots \\ \beta_{2m_2} \end{pmatrix} \quad ; \quad \underset{\lambda\times m_0}{X_b} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{n_{11}} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \mathbb{1}_{n_{ij}} & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & \mathbb{1}_{n_{2m_2}} \end{pmatrix} = \sum_{ij}^{+} \mathbb{1}_{n_{ij}}$$

$$\underset{n\times 1}{E} = \begin{pmatrix} E_{11\ldots} \\ \vdots \\ E_{ijk} \\ \vdots \\ E_{2m_2 n_{2m_2}} \end{pmatrix}$$

.../..

avec

$$EY = X_t T \quad \text{et} \quad \text{Var } Y = \sigma^2_b X_b X'_b + \sigma^2 I_n = \sigma^2 H$$

avec : $H = \rho X_b X'_b + I_n \quad$ et $\quad \rho = \sigma^2_b / \sigma^2$

1_n est un n vecteur dont toute les composantes sont égales à 1.
I_n est la n-matrice identité.

Par analogie au cas équilibré, le tableau "d'analyse de la variance" usuelle est le suivant :

Source de variation	D.D.L.	Carrés moyens	Espérance du C. M.
Traitement	1	$\Sigma(y_{i..} - y_{...})^2 = MST$	$\sigma^2 + k_1 \sigma^2_b + \emptyset(t)$
Entre blocs	$m_0 - 2$	$\Sigma(y_{ij.} - y_{i..})^2 / m_0 - 2 = MSB$	$\sigma^2 + k_2 \sigma^2_b$
Résiduelle	$n - m_0$	$\Sigma(y_{ijk} - y_{ij.})^2 / n - m_0 = MSR$	σ^2

avec $m_0 = \sum_{i=1}^{2} m_i$; $n_{i0} = \sum_{j=1}^{m_i} n_{ij}$; $n = \sum_{i=1}^{2} n_{i0}$; $\emptyset(t) = \sum_{i=1}^{2} n_{i0}(t_i - t_.)^2$

$$t_. = \frac{n_{10} t_1 + n_{20} t_2}{n} \; ; \; k_1 = \sum_{i=1}^{2} \frac{\sum_{j=1}^{m_i} n_{ij}^2}{n_{i_0}} - \frac{\sum_{ij} n_{ij}^2}{n} \; ; \; k_2 = \frac{n - \sum_{ij} \frac{n_{ij}^2}{n_{i0}}}{m_0 - 2}$$

Les points remplaçant les indices représentent les moyennes dans les blocs ou groupes correspondants.

Le calcul des espérances des carrés moyens se fait en utilisant le résultat suivant que nous énonçons sans démonstration.

.../..

Lemme 1 : Soit Y'QY une forme quadratique. On a $E(Y'QY) = tr\,(Q\ Var\ Y) + (EY)'\ Q(EY)$ et $Var\,(Y'QY) = 2\ tr\,(Q\ Var\ Y)^2 + 4(EY)'\ Q\ Var\ YQ(EY)$. Soit Y'RY une autre forme quadratique, alors $Cov\,(Y'QY, Y'RY) = 2\ tr\,(Q\ Var\ Y\ R\ Var\ Y) + 4(EY)'Q\ Var\ YR\ (EY)$. (voir Searle (54)).

Le calcul est immédiat si on écrit $MST = Y'Q_tY$; $MSB = Y'Q_bY$ et $MSR = Y'Q_rY$

Avec :

$$Q_T = \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{n_{10}} \mathbb{1}_{n_{10}} \mathbb{1}'_{n_{10}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_{20}} \mathbb{1}_{n_{20}} \mathbb{1}'_{n_{20}} \end{pmatrix} - \frac{1}{n} \mathbb{1}_n \mathbb{1}'_n \right]$$

$$Q_b = \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{n_{11}} \mathbb{1}_{n_{11}} \mathbb{1}'_{n_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{n_{1j}} \mathbb{1}_{n_{1j}} \mathbb{1}'_{n_{1j}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{n_{10}} \mathbb{1}_{n_{10}} \mathbb{1}'_{n_{10}} & \\ 0 & \frac{1}{n_{20}} \mathbb{1}_{n_{20}} \mathbb{1}'_{n_{20}} \end{pmatrix} \right] \Big/ (m_0 - 2)$$

$$Q_r = \left[I_n - \begin{pmatrix} \frac{1}{n_{11}} \mathbb{1}_{n_{11}} \mathbb{1}'_{n_{11}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{n_{1j}} \mathbb{1}_{n_{1j}} \mathbb{1}'_{n_{1j}} \end{pmatrix} \right] \Big/ (n - m_0)$$

Notons A, B et C les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{n_{11}} \mathbb{1}_{n_{11}} \mathbb{1}'_{n_{11}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{n_{1j}} \mathbb{1}_{n_{1j}} \mathbb{1}'_{n_{1j}} \\ & & & \ddots \end{pmatrix} = \sum_{ij}^{+} \frac{1}{n_{ij}} \mathbb{1}_{n_{ij}} \mathbb{1}'_{n_{ij}}$$

.../..

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{n_{10}} \mathbb{1}_{n_{10}} \mathbb{1}'_{n_{10}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_{20}} \mathbb{1}_{n_{20}} \mathbb{1}'_{n_{20}} \end{pmatrix} = \sum_{i}^{2+} \frac{1}{n_{i0}} \mathbb{1}_{n_{i0}} \mathbb{1}_{n_{i0}}$$

et

$$C = \frac{1}{n} \mathbb{1}_n \mathbb{1}'_n$$

Q_t, Q_b et Q_r s'écriront donc :

$$Q_t = B - C$$

$$Q_b = \frac{1}{m_0 - 2} (A - B)$$

et $Q_r = \frac{1}{n - m_0} (I_n - A)$ $\quad$ I_n est la matrice identité

Espérance des carrés moyens

$$E(Y'AY) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\sum_{i=3}^{n_{i\cdot}} n_{ij}^2}{n_{i0}} \sigma_a^2 + 2\sigma_e^2 + \sum_{i=1}^{2} n_{i0} t_i^2$$

$$E(Y'BY) = \frac{\sum_{ij} n_{ij}^2}{n} \sigma_a^2 + \sigma_e^2 + \frac{(\sum n_{i0} t_i)^2}{n}$$

$$E(Y'CY) = \left(\sum_{i=1}^{2} n_{i\cdot}\right) \sigma_e^2 + n\sigma_a^2 + \sum_{i=1}^{2} n_{i0} t_i^2$$

Les résultats du tableau d'"ANOVA" sont alors immédiats. Remarquons que ce tableau n'est un tableau "d'analyse de variance" que par analogie avec le

.../..

cas équilibré.
En effet, dans la suite, on va démontrer que, même dans le cas gaussien, les sommes de carrés le composant ne sont pas toutes indépendantes et ne suivent pas des lois de Khi-deux. Pour cela rappelons le résultat suivant :

Lemme 2 : Soit Y un n vecteur distribué suivant une loi normale N(u, V). Alors Y'QY et Y'RY deux formes quadratiques (Q et R matrices symétriques) sont indépendantes si et seulement si Q VR = 0. (Graybill p.88 (22))

Application : Sur l'indépendance des sommes de carrés du tableau d'Anova.

Notons $X_6' X_6 = A_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{n_{11}} \mathbb{1}'_{n_{11}} & \cdots \\ & \mathbb{1}_{n_{ij}} \mathbb{1}'_{n_{ij}} \\ & \ddots \end{pmatrix} = \sum_{ij}^{+} \mathbb{1}_{n_{ij}} \mathbb{1}'_{n_{ij}}$

Il est facile de voir que :

$$BA_0 = \sum_{i}^{+} \frac{1}{n_{i0}} \mathbb{1}_{n_{i0}} \left(n_{i1} \mathbb{1}'_{n_{i1}} \middle| \cdots \middle| n_{im_i} \mathbb{1}'_{n_{im_i}} \right) = B_1$$

$$A_0 A = A A_0 = A \quad \text{et} \quad BA = B \; ; \; BB = B$$

$$B_1 B = B_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sum_i n_{i1}^2}{n_{10}^2} \mathbb{1}_{n_{10}} \mathbb{1}'_{n_{10}} & 0 \\ 0 & \frac{\sum_i n_{i2}^2}{n_{20}^2} \mathbb{1}_{n_{20}} \mathbb{1}'_{n_{20}} \end{pmatrix}$$

$$CA_0 = \frac{1}{n} \left(n_{11} \mathbb{1}'_{n_{11}} \middle| \quad \cdots \right) = C_0$$

$$C_0 B = \frac{1}{n} \mathbb{1}_n \left(\frac{\sum_i n_{i1}^2}{n_{10}} \mathbb{1}'_{n_{10}} \middle| \frac{\sum_i n_{i2}^2}{n_{20}} \mathbb{1}'_{n_{20}} \right) = C_1$$

et enfin,

CA = CB = C

.../..

D'ou

$$Q_t \, V \, Q_r = (B - C)\,(\sigma^2_b \, A_o + \sigma^2 I_n)\,(I_n - A)/(n - m_o) = 0$$

$$Q_b \, V \, Q_r = (A - B)\,(\sigma^2_b A_o + \sigma^2 I_n)\,(I_n - A)/\,(n - m_o)\,(m_o - 2) = 0$$

mais :

$$Q_t \, V \, Q_b = (B - C)\,(\sigma^2_b A_o + \sigma^2 I_n)\,(A - B)/(m_o - 2) = \sigma^2_b\,(B_1 - B_2 + C_1 - C_0)/(m_o - 2)$$

$Q_t \, V \, Q_b \neq 0$ sauf dans le cas équilibré où $B_1 = B_2$ et $C_1 = C_0$.

Donc dans le cas non équilibré les sommes de carrés entre traitements et entre blocs ne sont pas indépendantes. Par contre la somme de carrés résiduelle est indépendante des autres sommes de carrés.

Distribution des sommes de carrés :

Nous rappelons un résultat : (Graybill (21))

Lemme 3 : Si Y est distribué suivant une loi normale N(u, V) alors Y'QY est distribué suivant une loi de Khi-deux décentré χ'^2 (k, λ) avec $\lambda = \frac{1}{2}$ u'Qu et k le rang de Q si et seulement si QV est idempotente QV QV = QV)

Résultat 1 : $\frac{(n - m_o)}{\sigma^2}$ MSR suit une loi de $\chi^2(n - m_o)$.

En effet en notant $Q = \frac{I - A}{\sigma^2}$ il est immédiat que QV QV = QV et le résultat en appliquant le lemme 3. De plus $t'X'_t \, Q \, X_t t = 0$.

Résultat 2 : $\frac{(m_o - 2)}{\sigma^2 + k_2\sigma^2_b}$ MSB ne suit une loi du $\chi^2(m_o - 2)$ que dans le cas équilibré.

Il suffit de calculer (A - B) V(A - B) V et comparer à $(\sigma^2 + k_2 \, \sigma^2_b)$ (A - B) V.

.../..

$$(\sigma_e^2 + k_2 \sigma_b^2)(A - B) V = k_2 \sigma_b^4 (A_0 - B_1) + \sigma_e^4 (A - B) + \sigma_e^2 \sigma_b^2 [A_0 - B_1 + k_2 (A - B)]$$

$$(A-B)V(A-B)V = \sigma_b^4 (A_1 - B_3 - B_5 + B_4) + \sigma_e^4 (A - B) + \sigma_e^2 \sigma_b^2 (2A_0 - 2B_1 - B_1' + B_2)$$

avec $B_3 = B_1 A_0 = \sum_i \frac{1}{n_{i0}} \Pi_{n_{i0}} (n_{ij}^2 \Pi'_{n_{ij}} | \ldots | \ )$

et $A_1 = A_0 A_0$; $B_5 = B_1' A_0$; $B_4 = B_1 B$

Dans le cas équilibré avec $n_{ij} = r$ et $m_i = m \ \forall \ ij$

$k_2 = r$; $A_1 = r A_0$; $B_3 = r B_2 = r B_1' = r B_1 = B_4 = B_5$

De plus $B = r B$. Le résultat en découle donc immédiatement. A l'équilibre $(A - B) V / (\sigma^2 + k_2 \sigma^2_b)$ est idempotente, de plus on peut montrer que $t' X'_t (A - B) X_t t = 0$. $\frac{(m_0 - 2)}{\sigma^2 + k_2 \sigma^2_b}$ MSB suit donc une loi de χ^2 $(m_0 - 2)$ a l'équilibre. Malheureusement ceci n'est plus vrai quand les n_{ij} ne sont pas égaux, sauf si σ^2_b est égal à zéro, d'où le test de l'hypothèse : "$\sigma^2_b = 0$".

Résultat 3 : $\frac{MST}{\sigma^2 + k_1 \sigma^2_b + \emptyset(t)}$ suit sous H_0 $(\emptyset(t) = 0)$ une loi de χ^2 (1)

En effet :

$$\frac{MST}{\sigma_e^2 + k_1 \sigma_b^2} = \frac{n_{1\cdot} n_{2\cdot}}{n} \frac{(Y_{1\cdot\cdot} - Y_{2\cdot\cdot})^2}{\sigma_e^2 + k_1 \sigma_b^2} = \frac{(Y_{1\cdot\cdot} - Y_{2\cdot\cdot})^2}{\sigma_e^2 \left(\sum_i \frac{1}{n_{i\cdot}}\right) + k_1 \left(\sum_i \frac{1}{n_{i\cdot}}\right) \sigma_b^2}$$

On verra plus tard (remarques chapitre V) que :

$$Var (Y_{1\cdot\cdot} - Y_{2\cdot\cdot}) = \sigma_e^2 \left(\sum_i \frac{1}{n_{i\cdot}}\right) + \sigma_b^2 \sum_i \frac{\sum_j n_{ij}^2}{n_{i\cdot}^2}$$

$$\text{et } k_1 \left(\sum_i \frac{1}{n_{i\cdot}}\right) = \sum_i \frac{\sum_j n_{ij}^2}{n_{i\cdot}^2}$$

et le résultat est immédiat.

.../..

II.1.2. - Estimation des composantes de la variance

Contrairement au cas équilibré, l'estimation des composantes de variance n'est pas facile. Il n'existe plus pour estimer les paramètres du modèle de statistique exhaustive complète. Différentes méthodes concurrentes existent sans qu'aucune ne soit supérieure. Rappelons brièvement ces différentes méthodes d'estimation :

II.1.2.1. - Méthodes d'Henderson

Nous ne nous étendrons pas sur les différentes méthodes d'Henderson (il y en a trois) ni sur leur présentation théorique dans le cas général. Searle dans (54), Masson J.P. dans (38) font une revue détaillée des différentes méthodes d'estimation des composantes de variance en général et de Henderson en particulier (26).

Dans notre cas, les trois méthodes d'Henderson se confondent. Elles consistent à partir du tableau d'"Anova", d'estimer les espérances des carrés moyens par les carrés moyens correspondants et de résoudre le système obtenu en écrivant les égalités obtenues. Ainsi pour notre modèle, le système sera :

$$\begin{aligned} MSB &= \hat{\sigma}^2 + k_2\, \hat{\sigma}^2_b \\ MSR &= \hat{\sigma}^2 \end{aligned}$$

d'où les estimateurs de Henderson.

$$\hat{\sigma}^2 = MSR \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}^2_b = \frac{MSB - MSR}{k_2}$$

La justification essentielle de ces estimateurs est la propriété de sans biais. On peut montrer aussi que ces estimateurs sont fonction de la statistique exhaustive minimale (qui n'est malheureusement pas complète). La propriété de variance minimum parmi les estimateurs sans biais qu'on avait dans le cas équilibré n'est plus vraie.

.../..

II.1.2.2. - Méthodes du Minque de C.R. Rao

Ces méthodes relativement récentes (début des années 70) ont suscité un grand nombre de travaux de recherches.

Si $Y \sim N(X_t, V)$ avec $V = \sum_{i=1}^{k} \sigma^2_i V_i$ ou σ^2_i

sont les composantes de variance, un estimateur de Rao des fonctions linéaires $\sum_h P_h \sigma^2_h$ des composantes de la variance satisfait aux conditions suivantes :

1-) Il est quadratique (i.e de la forme Y'QY, Q matrice symétrique)

2-) Il est sans biais (i.e $E(Y'QY) = \sum_h P_h \sigma^2_h$)

3-) Il est invariant par translation sur les paramètres fixes (i.e $(Y - Xt)' Q(Y - Xt) = Y' QY, \forall t$)

4-) Il est de norme minimum parmi les estimateurs satisfaisant à (2) et (3). La norme euclidienne définie sur l'ensemble des matrices symétriques est associée au produit scalaire noté $(Q_1 / Q_2) = 2 \text{ tr } Q_1 V Q_2 V$.

Pour calculer ces estimateurs, non uniques, nous utiliserons les résultats suivants dus à J. MOUSSA (40, 41).

Théorème 1 : Les MINQUES pour un modèle du type

$$Y_1 = \mu_1 + l_1$$
$$\vdots$$
$$Y_p = \mu_p + l_p$$

où les l_i sont deux à deux non corrélés, s'expriment en combinaison linéaire des Minques des p sous-modèles $Y_i = \mu_i + l_i$

Exemple : Soit notre modèle :

$$Y_{ijk} = t_i + \beta_{ij} + E_{ijk},$$

les minques seront les combinaisons linéaires de norme minimale des Minques

.../..

de la même quantité calculés pour les modèles plus simples :

$$Y_{(i)jk} = (t_j) + \beta_{(i)j} + E_{(i)jk} \quad i = 1, 2$$

à un facteur aléatoire.

Les Minques de σ^2_b dans un modèle à un facteur aléatoire sont connus. Ainsi dans notre modèle :

$$\hat{\sigma}^2_{bi} = \frac{1}{u_i w_i - v_i^2} \left[-v_i^2 \sum_{jk} Y^2_{ijk} + \sum_j \left(\frac{\alpha_i}{(1+n_{ij}\rho_0)^2} + \frac{v_i \rho_0}{1+n_{ij}\rho} \right) y^2_{ij0} + \frac{1}{S_{11i}} \sum_{jl} \left[\frac{\beta_i}{(1+n_{ij}\rho_0)(1+n_{il}\rho_0)} + \frac{\frac{\alpha_i}{\rho}\left(2 + n_{ij}\rho_0^2 + n_{il}\rho_0\right)}{(1+n_{ij}\rho_0)^2(1+n_{il}\rho_0)^2} \right] Y_{ij0} Y_{il0} \right]$$

avec $u_i = S_{22i} - 2\frac{S_{33i}}{S_{11i}} + \frac{S^2_{23i}}{S^2_{11i}}$

$$v_i = S_{12i} - 2\frac{S_{23i}}{S_{11i}} + \frac{S_{12i} S_{22i}}{S^2_{11i}}$$

$$w_i = n_{i0} - m_i + S_{02i} - 2\frac{S_{13i}}{S_{11i}} + \frac{S^2_{12i}}{S^2_{11i}}$$

avec $S_{\alpha\beta i} = \sum_{j=1}^{m_i} \frac{n_{ij}^{\alpha}}{(1+n_{ij}\rho)^{\beta}}$

$$\alpha_i = w_i + v_i \rho \quad \text{et} \quad \beta_i = w_i \left(\frac{S_{22i}}{S_{11i}} - \frac{2}{\rho} \right) - v_i \frac{S_{12i}}{S_{11i}}$$

.../..

$\hat{\sigma}^2_{b_i}$ est l'estimateur Minque de σ^2_b dans le groupe i (i = 1, 2) pris séparemment. ρ_0 est une valeur qu'on se fixe à l'avance, une valeur a priori de ρ.

Le Minque de $\hat{\sigma}^2_b$ sera égal à :

$$\hat{\sigma}^2_b = \alpha \hat{\sigma}^2_{b_1} + \beta \hat{\sigma}^2_{b_2}$$

avec $\alpha + \beta = 1$ pour assurer la propriété de sans biais.

II.1.2.3. - Estimateurs du Maximum de Vraisemblance

Nous en parlons au chapitre III, l'estimation du maximum de vraisemblance se justifiant surtout dans le cas des grands échantillons.

II.1.2.4 - Existe-t-il une statistique exhaustive minimale complète ?

Théorème 1 : la statistique {SCR, Z_{ih} et SC_{ih} i = 1, 2 ; h = 1 c et $r_{ih} \geq 2$} de dimension $1 + \sum_{i=1}^{2} \sum_{h=1}^{c} \inf(2, r_{ih})$, est exhaustive minimale pour $(t_1, t_2, \sigma^2_b, \sigma^2)$.

Démonstration : le principe de la démonstration est le même que pour un modèle aléatoire à un facteur (vois Coursol (15) p. 145).

Notations :

$$r_{ih} = \sum_{j=1}^{m_i} \mathbb{1}_{\{n_{ij}=h\}} \quad \text{où } \mathbb{1}_{A(x)} \text{ est la fonction indicatrice de l'ensemble A.}$$

$$Z_{ih} = \frac{1}{r_{ih}} \sum_{j/n_{ij}=h} Y_{ij.} \quad \text{et} \quad SC_{ih} = \sum_{j/n_{ij}=h} r_{ia} (Y_{ij.} - Z_{ia})^2$$

et c est le sup des n_{ij}.

.../..

Corollaire : Il existe une statistique exhaustive complète si et seulement si le modèle est équilibré.

Démonstration : En effet, si $n_{ij} \neq n_{ij'}$ pour un triplet i, j, j' on a $E\ Z_{ih} = E\ Z_{im} = t_i$ pour $n_{ij} = h$ et $n_{ij} = m$ et $\{Z_{ih}, Z_{im}\}$ appartient à une statistique exhaustive minimale (la statistique serait complète si $E\ Z_{ih} = E\ Z_{im} \Rightarrow Z_{ih} = Z_{im}$, ce qui est faux).

Conséquence : La structure statistique sous-jacente à notre modèle est incomplète. C'est ce qui explique l'inexistence de tests et d'estimateurs optimaux : " Si un paramètre admet un estimateur sans biais, il en admet une variété linéaire et il est souvent difficile de rechercher celui qui est de variance minimum " (Barra, (9)).
Un exemple classique de problème sur une structure statistique incomplète est le problème de Behrens-Fisher où en présence de deux échantillons de lois $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ on veut tester $\mu_1 = \mu_2$. " Linnik (34) montre dans cet exemple, qu'il n'existe aucun test dans la classe des fonctions régulières des statistiques v, s_1^2, et s_2^2 qui ne dépende pas du rapport σ_1^2 / σ_2^2 des variances " (PAGUROVA (43)). v est la statistique classique de Student utilisée quand $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, s_1^2 et s_2^2 sont les estimations habituelles de σ_1^2 et σ_2^2.

En pratique, on est amené à utiliser des tests approchés qui souvent se justifient par leurs propriétés asymptotiques.

II.2. - Tests habituels fondés sur le tableau d'ANOVA :

II.2.1. - Analyse dans le cas équilibré

Si les effectifs dans les blocs sont égaux ($n_{ij} = r, \forall\, i, j$) et le nombre de blocs par groupe est le même ($m_i = m, \forall i$) le tableau d'analyse de variance se simplifie. On aura $k_1 = k_2 = r$. Les sommes de carrés sont indépendantes et suivent des lois proportionnelles à des Khi-deux. Le test de l'hypothèse $H_0 : t_1 = t_2$ est immédiat : la statistique $U^2 = MST / MSB$ suit sous H_0 une loi de Fisher à 1 et 2 m - 2 degrés de liberté permet de réaliser le test. Les propriétés de ce test sont bien connues. Nous ne nous étendrons pas plus longtemps sur ce sujet.

II.2.2. - Tests classiques du cas non équilibré

Quand le plan n'est plus équilibré, le tableau I n'est plus un tableau d'" analyse de variance " au sens ou les sommes de carrés le décomposant ne sont plus indépendantes (du moins MST et MSB). Le test de l'hypothèse " $\sigma^2_b = 0$ " peut se faire à l'aide de la statistique MSB / MSR qui sous H_0 (" $\sigma^2_b = 0$ ") suit une loi de Fisher de $m_0 - 2$ et $n - m_0$ degrés de liberté. Pour tester l'égalité des traitements une stratégie possible est de tester d'abord " $\sigma^2_b = 0$ " par le test précédent. Si l'hypothèse nulle est acceptée, on teste l'hypothèse " $t_1 = t_2$ " comme si $\sigma^2_b = 0$ par la statistique

$$\frac{MST}{(m_0 - 2)\, MSB + (n - m_0)\, MSR \;/(n - 2)}$$

qui suit une loi de Fisher à 1 et n - 2 degrés de liberté, sous l'hypothèse " $t_1 = t_2$ et $\sigma^2_b = 0$ " ce qui est évident : on procède comme si il n'y avait pas de randomisation entre blocs, mais entre sujets et on ignore donc le regroupement par blocs. Si l'hypothèse " $\sigma^2_b = 0$ " est rejetée, on ne connait pas de test exact d'égalité des traitements.

Plusieurs méthodes approximatives sont utilisées :

.../..

II.2.2.1. - Test F approché

On utilise la même statistique que pour le cas équilibré et on suppose que U suit sous H un F (1, m - 2), ce qui est inéxact pour trois raisons :

1) - Les carrés moyens ne sont plus indépendants

2) - Ils ne suivent plus des lois de Khi-deux

3) - Ils n'ont pas la même espérance sous H_0 ($k_1 \neq k_2$).

Néanmoins l'utilisation de ce test est basé sur l'espoir que le " déséquilibre " du plan n'écarte pas trop la loi de U^2 de celle d'un F (1, m_0 - 2), ce qui est vrai pour des plans peu déséquilibrés comme on le verra dans la suite.

II.2.2.2. - Quasi-F test

Ce test approximatif est basé sur la formule de Satterthwaite (23). Si $MS = \sum_i a_i MS_i$ où les a_i sont des constantes connues et MS_i des carrés moyens de degrés de liberté f_i, Satterthwaite montre sous certaines conditions, que MS est distribuée approximativement comme un $\frac{E(MS)}{f} \chi^2(f)$ où f est estimé par la formule de Satterthwaite :

$$\hat{f} = (MS)^2 \Big/ \sum_i \left((a_i MS_i)^2 / f_i \right)$$

L'utilisation de cette formule quand un des a_i est négatif doit se faire avec précaution. Gaylor D.W. et Hopper F.N. (23) montrent dans une étude faite par simulation que la validité de cette formule dépend des espérances des MS_i (et donc des valeurs des composantes de variances) et des degrés de liberté f_i des MS_i.

Si on fait abstraction de ces précautions à prendre, le quasi-F test consiste à éliminer la troisième lacune du test F approché, en prenant au lieu de MSB comme dénominateur de U^2, MSB' choisi de manière que E (MSB') = E (MST) = $\sigma^2 + k_1 \sigma^2_b$

.../..

$$MSB' = MSR + \frac{k_1}{k_2}(MSB - MSR)$$

$$MSB' = \frac{k}{k} MSB + \frac{k_2 - k_1}{k_2} MSR$$

la formule de Satterthwaite permet de calculer les " degrés de liberté " de MSB' :

$$\hat{f}' = (MSB')^2 \Big/ \left[\frac{\left(\frac{k_1}{k_2} MSB\right)^2}{m_0 - 2} + \frac{\left(\frac{k_2 - k_1}{k_2} MSR\right)^2}{n - m_0} \right]$$

Le test est basé sur la statistique $U_Q^2 = MST / MSB'$ qu'on suppose suivre approximativement une loi de Fisher à 1 et $\tilde{f}'$ degrés de libertés, avec $\tilde{f}'$ partie entière de $\hat{f}'$.

Nous reviendrons au chapitre suivant sur la possibilité de faire d'autres tests.

III - TESTS BASES SUR LES ESTIMATIONS DES MOYENNES DANS LES GROUPES

III.1 - PRINCIPE DE CES TESTS

III.2 - DIVERS ESTIMATEURS DE LA MOYENNE T_I

III.2.1. MOYENNE GENERALE

III.2.2. MOYENNE NON PONDEREE DES BLOCS

III.2.3. MOYENNE PONDEREE DES BLOCS

III.2.4. ESTIMATEUR DE KOCH

III.2.5. ESTIMATEUR DE BIRKES

III.2.6. ESTIMATEUR DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

III.3 - BREF RAPPEL BIBLIOGRAPHIQUE DES COMPARAISONS DE CES ESTIMATEURS

III.4 - TEST DE COMPARAISONS DES MOYENNES

III.4.1. TEST BASE SUR LA MOYENNE GENERALE DANS CHAQUE GROUPE

III.4.2. TEST BASE SUR LA MOYENNE NON PONDEREE DANS CHAQUE GROUPE

III.4.3. TEST BASE SUR LA MOYENNE PONDEREE DANS CHAQUE GROUPE

III.4.4. TESTS BASES SUR LES AUTRES ESTIMATEURS

III.1 - Principe de ces tests

Si $\hat{\theta}_i$ est un estimateur de t_i et si Vâr $\hat{\theta}_i$ est un estimateur de la variance de $\hat{\theta}_i$, ces tests utilisent comme statistique une statistique analogue à la statistique de Student :

$$\frac{\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2}{\sqrt{\widehat{Var}\,\hat{\theta}_1 + \widehat{Var}\,\hat{\theta}_2}}$$

III.2 - Estimateurs de la moyenne t_i

Contrairement au cas équilibré, l'estimation de t_i n'est pas trivial.

III.2.1. - Moyenne générale

$$Y_{i..} = \frac{\sum_{j=1}^{m_i} n_{ij} Y_{ij.}}{n_{i0}} = \frac{\sum_{jk} Y_{ijk}}{n_{i0}}$$

$$\text{et } Var\, Y_{i..} = \frac{1}{n_{i0}^2} \sum_{j}^{m_i} n_{ij}^2 \left(\sigma_b^2 + \frac{\sigma^2}{n_{ij}} \right) = \frac{\sigma^2}{n_{i0}^2} \sum_{j}^{m_i} n_{ij}^2 / \alpha_{ij}$$

$$\text{avec } \alpha_{ij} = \left(\rho + \frac{1}{n_{ij}} \right)^{-1}$$

III.2.2. - Moyenne non pondérée des blocs

$$Y_i^* = \frac{\sum_{j}^{m_i} Y_{ij.}}{m_i}$$

$$\text{et } Var\, Y_i^* = \frac{\sigma^2}{m_i^2} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{1}{\alpha_{ij}}$$

.../..

III.2.3. - Moyennes pondérées des blocs

$$\hat{t}_{i.} = \frac{\sum_{j}^{m_{i.}} \alpha_{ij} Y_{ij.}}{\sum_{j}^{m_{i.}} \alpha_{ij.}}$$

Si ρ est connu, cet estimateur est le meilleur estimateur sans biais parmi les estimateurs linéaires en Y, sa variance est Var $\hat{t}_i = \sigma^2 / \sum_{j=1}^{m_{i.}} \alpha_{ij}$. Quand ρ est inconnu, il est classique de prendre comme estimateur de t_i

$$\hat{\hat{t}}_{i.} = \frac{\sum_{j=1}^{m_{i.}} \hat{\alpha}_{ij.} Y_{ij.}}{\sum_{j=1}^{m_{i.}} \hat{\alpha}_{ij.}}$$

où $\hat{\alpha}_{ij.} = \left(\hat{\rho} + \frac{1}{n_{ij.}}\right)^{-1}$ avec $\hat{\rho} = \frac{\hat{\sigma}_b^2}{\hat{\sigma}^2}$

ou $\tilde{t}_{i.} = \frac{\sum_{j=1}^{m_{i.}} \tilde{\alpha}_{ij.} Y_{ij.}}{\sum_{j=1}^{m_{i.}} \tilde{\alpha}_{ij.}}$

ou $\tilde{\alpha}_{ij.} = \left(\tilde{\rho} + \frac{1}{n_{ij.}}\right)^{-1}$ avec $\tilde{\rho} = \sup(0, \tilde{\rho})$

$\tilde{t}_i$ est un estimateur sans biais pour t_i, comme cela a été démontré par Weiler et Culpin (60).

$\hat{t}_i$ qui n'estime pas t_i sans biais à l'avantage d'être asymptotiquement normal, ce qu'on démontre dansle chapitre suivant.

On ne sait pas calculer les variances de ces deux estimateurs. On démontre, que si on duplique le plan de base, la variance asymptotique de $\hat{\hat{t}}_i$ est égale à celle de $\hat{t}_i$:

$$\frac{\sigma^2}{\sum_{j}^{m_{i.}} \alpha_{ij.}}$$

III.2.4. - Estimateur de Koch : qui est aussi un estimateur pondéré des moyennes des blocs (30)

$$g_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{m_i} n_{ij\cdot}(n_{i0} - n_{ij\cdot})\,Y_{ij\cdot} \Big/ \sum_{j=1}^{m_i} n_{ij\cdot}(n_{i0} - n_{ij\cdot})$$

et Var $g_{i\cdot} = \dfrac{\sigma^2}{\left(\sum n_{ij\cdot}(n_{i0} - n_{ij\cdot})\right)^2} \sum_{j=1}^{m_i} n_{ij\cdot}^2 (n_{i0} - n_{ij\cdot})^2 / d_{ij\cdot}$

III.2.5. - Estimateur de Birkes : Dans un article récent (Mai 1981) Birkes, Seely et Azzam (7) proposent un nouvel estimateur de la moyenne t_i.

$$\hat{\mu}_i = \sum_j n_{ij\cdot}\left[(n_{ij\cdot} - 1)c_i + 1\right]^{-1} Y_{ij\cdot} \Big/ \sum_j n_{ij\cdot}\left[(n_{ij\cdot} - 1)c_i + 1\right]^{-1}$$

avec c_i solution de l'équation

$$n_{i0} \sum_j n_{ij\cdot}\left[(n_{ij\cdot} - 1)c_i + 1\right]^{-2} = m_i \sum n_{ij\cdot}^2 \left[(n_{ij\cdot} - 1)c_i + 1\right]^{-2}$$

qui peut être résolue par des méthodes itératives numériques.

.../..

III.2.6. - Estimateur du Maximum de Vraisemblance

Nous verrons plus loin au chapitre IV que cet estimateur est :

$$\hat{\hat{t}}_i = \frac{\sum_j \hat{\hat{a}}_{ij} \cdot Y_{ij.}}{\sum_j \hat{\hat{a}}_{ij}}$$

avec $\hat{\hat{\alpha}}_{ij} = (\hat{\hat{\rho}} + \frac{1}{n_{ij}})^{-1}$ et $\hat{\hat{\rho}}$ estimateur du maximum de vraisemblance de ρ qui ne peut être obtenu que par des méthodes numériques itératives.

III.3 - Bref rappel bibliographique des comparaisons de ces estimateurs

Depuis l'article de Cochran en 1954 (12), différents auteurs se sont penchés sur la comparaison de ces différents estimateurs. Cochran conseille d'utiliser $Y_{i..}$ si σ^2_b est proche de 0, Y_i^* si σ^2_b est grand et $\hat{t}_i$ (ou $\tilde{t}_i$) si l'on n'a pas d'information à priori sur σ^2_b. Weiler & Culpin (1970) (60) étudient les efficacités de $Y_{i..}$, Y_i^*, et $\hat{t}_i$ et en notant

$$\rho_{oi} = \frac{n_{i.}(n_{i.}\sum_j n_{ij}^2 - n_{io}^2)}{n_{io}(n_{io}\sum_j \frac{1}{n_{ij}} - n_{i.}^2)}$$

conseillent d'utiliser

$Y_{i..}$ si $\rho_{oi} < \rho_{min}$ (ρ_{min} est une borne inférieure de ρ)

et Y_i^* si $\rho_{oi} > \rho_{max}$ (ρ_{max} est une borne supérieure de ρ)

$\hat{\hat{t}}_i$ si $\rho_{min} < \rho_{oi} < \rho_{max}$

ou si l'on n'a aucune information à priori sur ρ.

.../..

Plus récemment (Mars 1981) RAO R.S.R., KAPLAN J. et COCHRAN W.G., ont comparé par les méthodes de Monté-Carlo, $Y_{i..}$, Y_i^* et $\hat{t}_i$ avec différents estimateurs des composantes de variances (Henderson, Minque, etc ...). Le modèle choisi est plus général que le notre (Var $E_{ijk} = \sigma^2_i$ au lieu de σ^2, l'erreur technique est différente selon les blocs). Ils aboutissent à des conclusions similaires : choix de $Y_{i..}$ quand σ^2_b est nulle et de Y_i^* quand σ^2_b est grand.

BIRKES D., SEELY J. et AZZAM A.M. (Mai 1981) (7) recommandent le choix de $Y_{i..}$ si ρ est proche de 0, le choix de leur estimateur $\hat{\mu}_c$ sinon et le choix de Y_i^* si les méthodes numériques nécessaires pour déterminer c rebutent.

III.4 - Tests de comparaisons des moyennes

Les tests de comparaisons de deux moyennes découlent directement des deux paragraphes précédents. Il suffit pour cela de choisir un estimateur de la variance de la moyenne estimée. Si l'on connait la vrai variance de la moyenne estimée, un estimateur sans biais de cette variance s'obtient en substituant dans la formule donnant celle ci, les composantes de variances par leur estimateur sans biais. Un problème se pose néanmoins : ces estimateurs ne sont pas permissibles (ils peuvent prendre des valeurs négatives avec une probabilité non nulle). On leur préfère en général les estimateurs permissibles obtenus en remplaçant par zéro les valeurs négatives qu'ils peuvent prendre. De plus il est préférable que ces estimateurs soient convergents, pour assurer la normalité asymptotiques des tests, et ceci est vrai pour les estimateurs de Henderson.

III.4.1. - Test basé sur la moyenne générale dans chaque groupe :

Ce test s'écrit donc :

$$U_1 = \frac{Y_{1..} - Y_{2..}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 \sum_i \frac{\sum_j n_{ij}^2 / \hat{\sigma}^2_{ij}}{n_{i0}^2}}}$$

.../..

ou $\hat{\sigma}^2$ et $\hat{\alpha}_{ij}$ sont respectivement l'estimateur de Henderson de σ^2 et l'estimateur de α_{ij} en prenant pour estimateur de σ^2 et σ_b^2 les estimateurs de Henderson.

On peut montrer aisément que $U_1^2 = U_2^2$ la statistique du quasi F test (Voir chapitre V).

On verra plus loin que U_1 suit asymptomatiquement une loi N (0, 1). Pour des effectifs plus réduits, il est naturel de faire un test Student avec $m_0 - 2$ degrés de libertés ou avec f' degrés de liberté (formule de Satterthwaite).

III.4.2. - Test basé sur la moyenne non pondérée dans chaque groupe

$$U_2 = \frac{Y_1^* - Y_2^*}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 \sum_i \frac{\sum_j 1/\hat{\alpha}_{ij}}{m_i^2}}}$$

qui sous H_0, suit

asymptotiquement pour m_i grand une loi normale centrée réduite. Pour des valeurs de m_i plus réduite, on peut de même utiliser la loi de Student à $m_0 - 2$ degrés de liberté. On peut aussi estimer les degrés de liberté à l'aide de la formule de Satterthwaite, en remarquant que le radicande du dénominateur s'écrit :

$$\hat{\sigma}_b^2 \sum_i \frac{1}{m_i} + \hat{\sigma}^2 \sum_i \left(\sum_j 1/\alpha_{ij} \right) / m_i^2$$

.../..

III.4.3. - Test basé sur la moyenne pondérée dans chaque groupe

$$U_3 = \frac{\hat{\hat{\hat{t}}}_1 - \hat{\hat{\hat{t}}}_2}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 \sum_i 1/\hat{\alpha}_{i0}}}$$

avec $\hat{\alpha}_{io} = \sum_j \hat{\alpha}_{ij}$

Nous reviendrons plus loin sur ce test qui n'est pas très différent du test que nous proposons.

III.4.4. - Tests basés sur les autres estimateurs

Le principe est le même que précédemment, et ces tests sont en général asymptotiquement normaux.

. Test basé sur l'estimateur de Kock :

$$U_4 = \frac{g_1 - g_2}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 \sum_i \frac{\sum_j n_{ij}^2 (n_{i0} - n_{ij})^2 / d_{ij}}{\left(\sum_j n_{ij}/(n_{i0} - n_{ij})\right)^2}}}$$

. Test basé sur l'estimateur de Birkes :

$$U_5 = \frac{\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 \sum_i \frac{\sum_j n_{ij} \left[(n_{ij} - 1) c_i + 1\right]^{-1} / \hat{d}_{ij}}{\sum_j n_{ij} \left[(n_{ij} - 1) c_i + 1\right]^{-1}}}}$$

.../..

ou c_i est définit en III.2.5.

. Test basé sur l'estimateur du maximum de vraisemblance.

Même expression que U_3 avec $\hat{\hat{\rho}}$ et $\hat{\hat{\sigma}}^2$ estimateurs du maximum de vraisemblance de ρ et σ^2.

IV - TEST PROPOSE

IV.1 - TEST OPTIMAL POUR ρ CONNU

IV.2 - TEST PROPOSE DANS LE CAS OU ρ EST INCONNU

IV.2.1. CAS DE PLUSIEURS TRAITEMENTS

IV.2.2. CAS OU LA VARIANCE DES EFFETS BLOCS N'EST PAS LA MEME DANS LES DEUX GROUPES

IV.2.3. REMARQUE

IV.2.4. MODIFICATIONS POSSIBLES DE NOTRE TEST

IV.1 - Test optimal pour ρ connu

Supposons dans une première étape que ρ est connu et déterminons le test F pour tester l'égalité des effets fixes.

Le modèle s'écrit : $Y = X_t T + \varepsilon$ avec

$$E(Y) = X_t T \quad \text{et} \quad \text{Var } Y = \text{Var } \varepsilon = \sigma^2 H \quad \text{ou}$$

$H = \rho X_B X'_B + I_n = \rho A_0 + I_n$ est une matrice connue.

Lemme 1 : Il existe D telle que $DHD' = I_n$ et $D'D = H^{-1}$.

En effet H étant définie positive, il existe A orthogonale telle que

$$AHA' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{et } \lambda_i > 0 \text{ (valeurs propres de H)}$$

$i = 1, \ldots, n$;

Soit $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{pmatrix}$; $D = BA$ répond à la question.

Lemme 2 : $\hat{t} = (X' H^{-1} X)^{-1} X' H^{-1} Y$ est l'estimateur sans biais de t de variance minimum si le modèle est gaussien.

Notons $Y_1 = DY$ et $X_1 = DX$, $\varepsilon_1 = D\varepsilon$.

Nous avons $Y_1 = X_1 0t + \varepsilon_1$ avec $E(\varepsilon_1) = 0$ et $\text{Var } \varepsilon_1 = D \text{ Var } \varepsilon D' = \sigma^2 I$.

On est ramené à un modèle linéaire dans lequel $\hat{t} = (X_1' X_1)^{-1} X_1' Y_1 = (X'D'DX)^{-1} X'D'DY$ et le résultat.

.../..

Propriétés de $\hat{t}$:

Cas gaussien : $\hat{t}$ est le meilleur estimateur sans biais de t (de variance minimum parmi les estimateurs sans biais)

Cas non gaussien : Théorème de Gauss-Markov :

$\hat{t}$ est le meilleur estimateur sans biais parmi les estimateurs sans biais linéaires en Y.

Test F d'une sous-hypothèse linéaire

On trouvera dans le livre de J. Coursol (15) ou dans celui de Scheffé (52) une étude complète. Rappelons les principaux résultats.

Soit le modèle linéaire gaussien $Y = X\theta + \varepsilon$ avec $X : R^k \to R^n$ injectif, $\theta \in R^k$, $E(Y) = X\theta$ et Var $Y = \sigma^2 I_n$.

Soient ψ et ω deux sous-espaces vectoriels emboités de R^k, $\omega < \psi \leq R^k$ de dimension respectives l et h, avec $h < l \leq k$.

On suppose l'hypothèse H_ψ : " $\theta \in \psi$ " vraie et on veut tester la sous-hypothèse H_ω : " $\theta \in \omega$ " contre $H_{\psi - \omega}$: " $\theta \in \psi$; $\theta \not\in \omega$ ".

Soit V_ω et V_ψ les images respectives de ω et ψ dans R^n par l'application X, P_ω et P_ψ les projecteurs orthogonaux associés.

Notons $SC_\omega = \|(I - P_\omega) Y\|^2$ et $SC_\psi = \|(I - P_\psi) Y\|^2$. On a :

Théorème : $U^2 = \dfrac{(SC_\omega - SC_\psi)/l - h}{SC_\psi / n - l}$ suit une loi de Fisher

$F'(l - h, n - l, \dfrac{1}{\sigma^2} \|(P_\psi - P_\omega) X\theta\|^2)$ et une loi de $F(l - h, n - l)$ sous H_ω.

Soit $f_{\alpha,l-h,n-l}$ définie par Prob $(V \geq f_{\alpha,l-h,n-l}) = \alpha$ avec V de loi $F(l - h, n - l)$. Alors $D_\alpha = \{U \geq f_{\alpha,l-h,n-l}\}$ défini la région de rejet d'un test de H_ω contre $H_{\psi-\omega}$ de niveau α, appelé test de Fisher ou test F, uniformément le plus puissant parmi les tests invariants par $\mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ étant l'ensemble des trans-

.../..

formations t sur $(X\theta, \sigma^2)$ définit par :

1) les translations de V_ψ parallèlement à V_ω

2) les transformations orthogonales de V_ψ qui amènent globalement V_ω.

3) les changements d'échelle : $t\,(X\theta, \sigma^2) = (\lambda X\theta, \lambda^2\sigma^2)$, $\lambda \in R^+$.

Remarque : $P_\psi\, Y = X\hat{\theta}_\psi$ et $P_\omega\, Y = X\hat{\theta}_\omega$, $\hat{\theta}_\psi$ et $\hat{\theta}_\omega$ étant les estimateurs de θ respectivement sous H_ψ et H_ω .

et donc $$U^2 = \frac{\|X(\hat{\theta}_\psi - \hat{\theta}_\omega)\|^2/(\ell - k)}{\|Y - X\hat{\theta}_\psi\|^2/(n - \ell)} = \frac{(\hat{\theta}_\psi - \hat{\theta}_\omega)'X'X(\hat{\theta}_\psi - \hat{\theta}_\omega)/(\ell - k)}{(Y - X\hat{\theta}_\psi)'(Y - X\hat{\theta}_\psi)/(n - \ell)}$$

Cas particulier important : $\psi = R^k$ et ω est le noyau d'une application C de rang q de R^k dans R^q. H est équivalente à " $\varphi = C\theta = 0$ ".

Exemple dans notre problème $C = (1, -1)$ et on teste $Ct = 0 : (t_1 - t_2 = 0)$

Le test F s'obtient alors :

Théorème 2 : Soit $\hat{\varphi} = C\hat{\theta}$, $V_{\hat{\varphi}} = \frac{1}{\sigma^2}\,\mathrm{Var}\,\hat{\varphi} = C\,(X'X)^{-1}C'$, $S^2 = \frac{1}{n-k}\,(Y - X\hat{\theta})'(Y - X\hat{\theta})$.

Le test F de l'hypothèse " $\varphi = 0$ " admet le domaine de rejet

$$\mathcal{D}_\alpha = \left\{ U^2 = \frac{\hat{\varphi}'\, V_{\hat{\varphi}}^{-1}\, \hat{\varphi}}{q S^2} \geq f_{\alpha, q, n-k} \right\}$$

Application : test d'égalité des traitements dans notre modèle quand ρ est connu.

.../..

Théorème 3 : Le test F de l'hypothèse $t_1 = t_2$ quand ρ est connu admet le domaine de rejet :

$$\mathcal{D}_\alpha = \left\{ T^2(\rho) = \frac{(\hat{t}_1(\rho) - \hat{t}_2(\rho))^2}{[SCR + SC(\rho)]/(n-2)} \times \frac{\alpha_{10}\alpha_{20}}{\alpha_{00}} \geq f_{\alpha,1,n-2} \right\}$$

ou $$\alpha_{i0} = \sum_j \alpha_{ij} \; ; \; \alpha_{00} = \sum_i \alpha_{i0} \; ; \; \alpha_{ij} = \frac{1}{\rho + \frac{1}{n_{ij}}}$$

$$\hat{t}_i(\rho) = \sum_j \alpha_{ij} Y_{ij\cdot} / \alpha_{i0}$$

et

$$SCR = MSR \times (n - m_0) \; ; \; SC(\rho) = \sum_{ij} \alpha_{ij} (Y_{ij\cdot} - \hat{t}_i(\rho))^2$$

Démonstration :

Il s'agit d'appliquer le théorème 2.

Notre modèle s'écrit $Y = X_t T + \varepsilon$ avec

$$X = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{n_{10}} & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{n_{20}} \end{pmatrix} \; ; \; t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \text{ et } \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11\cdot} \\ \vdots \\ \varepsilon_{ijk} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

D'après le lemme 1, il existe D telle que D H D' = In et D'D = H^{-1}

.../..

Transformons notre modèle : $Y_1 = DY$ d'où

$Y_1 = X_1 t + \varepsilon_1$ avec $X_1 = DX$ et $\varepsilon_1 = D\varepsilon$

et $E\, X_1 t = X_1 t$, $Var\ \varepsilon = \sigma^2 In$.

Il s'agit de tester dans ce modèle linéaire gaussien $Ct = 0$ avec $C = (1, -1)$ application linéaire de rang 1.

Avec les notations du théorème 2, il vient :

$\varphi = Ct$

$V_{\hat{\varphi}} = C\,(X_1' X_1)^{-1} C' = C\,(X' D' D X)^{-1} C' = C\,(X' H^{-1} X)^{-1} C'$

$V_{\hat{\varphi}} = C\,(X'H^{-1}X)^{-1} C'$

$\hat{\varphi}'\, V_{\hat{\varphi}}^{-1}\, \hat{\varphi} = \hat{t}'\, C'\, (C(X'H^{-1}X)^{-1}C')^{-1} C\hat{t}$

et d'après le lemme 2 :

$\hat{t} = (X'H^{-1}X)^{-1} X'\, H^{-1} Y.$

Calcul de H^{-1}:

$$H = \rho A_0 + I_n$$

$$= \rho \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{n_1} \mathbb{1}'_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbb{1}_{n_j} \mathbb{1}'_{n_j} \\ & & & \ddots \end{pmatrix} + I_n$$

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & H_{ij} \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{avec } H_{ij} = \rho\, \mathbb{1}_{n_j} \mathbb{1}'_{n_j} + I_{n_j}$$

.../..

donc $H^{-1} = \begin{pmatrix} H^{-1}_{ii} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & H^{-1}_{nn} \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$

Il s'agit de calculer H^{-1}_{ij} ce qui est aisé en remarquant que :

$$(\Pi_{n_{ij}} \Pi'_{n_{ij}})(\Pi_{n_{ij}} \Pi'_{n_{ij}}) = n_{ij} \Pi_{n_{ij}} \Pi'_{n_{ij}}$$

et que

$$\Pi_{n_{ij}} \Pi'_{n_{ij}} \bar{\Pi}_{n_{ij}} = \Pi_{n_{ij}} \Pi'_{n_{ij}}$$

$$\text{et} \quad \bar{\Pi}_{n_{ij}} \bar{\Pi}_{n_{ij}} = \Pi_{n_{ij}}$$

et donc l'ensemble des matrices de la forme $\alpha \Pi_{n_{ij}} \Pi'_{n_{ij}} + \beta \bar{\Pi}_{n_{ij}}$ constitue une sous algèbre commutative. H^{-1}_{ij} sera donc de la forme $\alpha \Pi_{n_{ij}} \Pi'_{n_{ij}} + \beta \bar{\Pi}_{n_{ij}}$.

On détermine α et β en écrivant $H_{ij} . H^{-1}_{ij} = \Pi_{n_{ij}}$.

Donc :

$$(\rho \Pi_{n_{ij}} \Pi'_{n_{ij}} + \bar{\Pi}_{n_{ij}})(\alpha \Pi_{n_{ij}} \Pi'_{n_{ij}} + \beta \bar{\Pi}_{n_{ij}}) = \bar{\Pi}_{n_{ij}}$$

$$n_{ij} \rho \alpha \Pi_{n_{ij}} \Pi'_{n_{ij}} + \rho \beta \Pi_{n_{ij}} \bar{\Pi}_{n_{ij}} + \alpha \Pi_{n_{ij}} \Pi'_{n_{ij}} + \beta \bar{\Pi}_{n_{ij}} = \bar{\Pi}_{n_{ij}}$$

d'où $\begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha(1 + \rho n_{ij}) + \rho \beta = 0 \end{cases}$

.../..

d'où $\alpha = \dfrac{-\rho}{1+\rho n_{ij}}$

donc $H_{ij}^{-1} = \dfrac{-\rho}{1+\rho n_{ij}} \Pi_{n_{ij}} \Pi'_{n_{ij}} + \Pi_{n_{ij}}$

et donc $H^{-1} = \sum_{ij}^{+} (H_{ij}^{-1}) = \sum_{ij}^{+} \left(\dfrac{-\rho}{1+\rho n_{ij}} \Pi_{n_{ij}} \Pi'_{n_{ij}} + \Pi_{n_{ij}} \right)$

Calcul de $X' H^{-1}$:

$$X' H^{-1} = \begin{pmatrix} \Pi'_{n_{10}} & 0 \\ 0 & \Pi'_{n_{20}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1^{-1} & 0 \\ 0 & H_2^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{avec } H_i^{-1} = \sum_{j}^{m_i +} H_{ij}^{-1} \quad i = 1, 2$$

On a $\Pi'_{n_{10}} H_i^{-1} = \left(\Pi'_{n_{11}} | \cdots | \Pi'_{n_{ij}} | \cdots \right) \begin{pmatrix} \left| \dfrac{-\rho}{1+\rho n_{ij}} \Pi_{n_{ij}} \Pi'_{n_{ij}} + \Pi_{n_{ij}} \right| & \\ & \ddots \\ 0 & \end{pmatrix}$

$$= \left(\dfrac{-\rho_{i1}}{1+\rho_{i1}} \Pi'_{n_{i1}} + \Pi'_{n_{i1}} \Big| \cdots \Big| \dfrac{-\rho_{ij}}{1+\rho_{ij}} \Pi'_{n_{ij}} + \Pi'_{n_{ij}} \Big| \cdots \right)$$

$$= \left(\dfrac{\alpha_{i1}}{n_{i1}} \Pi'_{n_{i1}} \Big| \cdots \Big| \dfrac{\alpha_{ij}}{n_{ij}} \Pi'_{n_{ij}} \Big| \cdots \right)$$

Calcul de $X' H^{-1} X$

$$X' H^{-1} X = \left(\begin{array}{c|c} \dfrac{\alpha_{11}}{n_{11}} \Pi'_{n_{11}} | \cdots | \dfrac{\alpha_{1j}}{n_{1j}} \Pi'_{n_{1j}} | \cdots & 0 \\ \hline 0 & \left| \dfrac{\alpha_{21}}{n_{21}} \Pi'_{n_{21}} \right| \cdots \end{array} \right) \begin{pmatrix} \Pi_{n_{10}} & 0 \\ 0 & \Pi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_j \frac{\alpha_{1j}}{n_{1j}} \mathbb{1}'_{n_{1j}} \mathbb{1}_{n_1} & 0 \\ 0 & \sum_j \frac{\alpha_{2j}}{n_{2j}} \mathbb{1}'_{n_{2j}} \mathbb{1}_{n_{2j}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_j \alpha_{1j} & 0 \\ 0 & \sum_j \alpha_{2j} \end{pmatrix}$$

donc $X'H^{-1}X = \begin{pmatrix} \alpha_{10} & 0 \\ 0 & \alpha_{20} \end{pmatrix}$

et donc $(X'H^{-1}X) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_{10}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha_{20}} \end{pmatrix}$

Calcul de $X'H^{-1}Y$:

$$X'H^{-1}Y = \left(\begin{array}{c|c|c} \frac{\alpha_{11}}{n_{11}} \mathbb{1}'_{n_{11}} & \cdots & \frac{\alpha_{1m_1}}{n_{1m_1}} \mathbb{1}'_{n_{1m_1}} \\ \hline 0 & & \frac{\alpha_{21}}{n_{21}} \mathbb{1}'_{n_{21}} \end{array} \right) \begin{pmatrix} Y_{11} \\ \vdots \\ Y_{1m_1} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

en notant $Y_{ij} = \begin{pmatrix} Y_{ij1} \\ \vdots \\ Y_{ijn_{ij}} \end{pmatrix}$

donc $X'H^{-1}Y = \begin{pmatrix} \sum_j \frac{\alpha_{1j}}{n_{1j}} \mathbb{1}'_{n_{1j}} Y_{1j} \\ \sum_j \frac{\alpha_{2j}}{n_{2j}} \mathbb{1}'_{n_{2j}} Y_{2j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_j \alpha_{1j} \bar{Y}_{1j} \\ \sum_j \alpha_{2j} \bar{Y}_{2j} \end{pmatrix}$

Calcul de $\hat{t}$:

$$\hat{t} = (X' H^{-1} X)^{-1} X' H^{-1} Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_{10}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha_{20}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_j \alpha_{1j} Y_{1j} \cdot \\ \sum_j \alpha_{2j} Y_{2j} \cdot \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sum_j \alpha_{1j} Y_{1j} \cdot}{\alpha_{10}} \\ \frac{\sum_j \alpha_{2j} Y_{2j} \cdot}{\alpha_{20}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{t}_1(p) \\ \hat{t}_2(p) \end{pmatrix}$$

Calcul de $V_{\hat{\varphi}}$:

$$V_{\hat{\varphi}} = (1, -1) \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_{10}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha_{20}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha_{10}} + \frac{1}{\alpha_{20}} = \frac{\alpha_{00}}{\alpha_{10}\alpha_{20}}$$

$$\Rightarrow \quad V_{\hat{\varphi}}^{-1} = \frac{\alpha_{10}\alpha_{20}}{\alpha_{00}}$$

Calcul de S^2 :

$$S^2 = \frac{1}{n-2} (Y_1 - X_1 \hat{t})'(Y_1 - X_1 \hat{t})$$

$$= \frac{1}{n-2} (Y - X\hat{t})' H^{-1} (Y - X\hat{t})$$

le vecteur $Y - X\hat{t}$ s'écrit : $(Y_{11} - \hat{t}_1(p), \dots, Y_{1n_1} - \hat{t}_1(p), \dots)'$

notons $(Y_{ij1} - \hat{t}_i(\rho), Y_{ij2} - \hat{t}_i(\rho), \dots) = Y_{ij\cdot} - \mathbb{1}_{n_{ij}} \hat{t}_i(\rho)$

d'où

$$(n-2)S^2 = \sum_{ij} (Y_{ij\cdot} - \mathbb{1}_{n_{ij}} \hat{t}_i(\rho))' H_{ij}^{-1} (Y_{ij\cdot} - \mathbb{1}_{n_{ij}} \hat{t}_i(\rho))$$

$$= \sum_{ij} (Y'_{ij\cdot} - \hat{t}_i(\rho) \mathbb{1}'_{n_{ij}})(Y_{ij\cdot} - \mathbb{1}_{n_{ij}} \hat{t}_i(\rho))$$

$$- \rho \sum_{ij} (Y'_{ij\cdot} - \hat{t}_i(\rho) \mathbb{1}'_{n_{ij}}) \mathbb{1}_{n_{ij}} \mathbb{1}'_{n_{ij}} (Y_{ij\cdot} - \mathbb{1}_{n_{ij}} \hat{t}_i(\rho)) / (1+\rho n_{ij})$$

$$= \sum_{ij} (Y'_{ij\cdot} Y_{ij\cdot} + n_{ij} \hat{t}_i^2(\rho) - 2 Y'_{ij\cdot} \mathbb{1}_{n_{ij}} \hat{t}_i(\rho) -$$

$$\rho \sum_{ij} \frac{\alpha_{ij}}{n_{ij}} (Y'_{ij\cdot} \mathbb{1}_{n_{ij}} - n_{ij} \hat{t}_i(\rho))^2$$

$$= \sum_{ij} (Y'_{ij\cdot} Y_{ij\cdot} - n_{ij} \hat{t}_i^2(\rho) - 2 n_{ij} Y_{ij\cdot} \hat{t}_i(\rho)) - \rho \sum_{ij} n_{ij} \alpha_{ij} (Y_{ij\cdot} - \hat{t}_i(\rho))$$

$$= \left(\sum_{ij} Y'_{ij\cdot} Y_{ij\cdot} - \sum_{ijk} Y_{ijk}^2\right) + \sum_{ij} n_{ij} Y_{ij\cdot}^2 - \sum_{ij} n_{ij} \hat{t}_i^2(\rho)$$

$$- 2 \sum_{ij} n_{ij} Y_{ij\cdot} \hat{t}_i(\rho) - \rho \sum_{ij} n_{ij} \alpha_{ij} (Y_{ij\cdot} - \hat{t}_i(\rho))^2$$

$$= SCR + \sum_{ij} n_{ij} (1 - \rho \alpha_{ij}) (Y_{ij\cdot} - \hat{t}_i(\rho))^2$$

or $n_{ij}(1+\rho\alpha_{ij}) = n_{ij}\left(\frac{\rho + \frac{1}{n_{ij}} - \rho}{\rho + \frac{1}{n_{ij}}}\right) = \alpha_{ij}$

d'où $S^2 = (SCR + S(\rho))/(n-2)$ avec $S(\rho) = \sum_{ij} \alpha_{ij} (Y_{ij\cdot} - \hat{t}_i(\rho))^2$

et le resultat du Théorème 3.

Propriétés du test $T^2(\rho)$:

1) Si ρ est connu, les propriétés du test sont celles du test F classique.

2) A l'équilibre : $n_{ij} = r$, $\forall$ i,j et $m_i = r$

d'où

$$\alpha_{ij} = \frac{r}{1+r\rho} \; ; \; \alpha_{i0} = \frac{mr}{1+r\rho} \; ; \; \hat{t}_i(\rho) = Y_{i..}$$

$$SC(\rho) = \sum_{ij} \frac{r}{1+r\rho} (Y_{ij.} - Y_{i..})^2 = \sum_{ijk} (Y_{ijk} - Y_{i..})^2 / (1+r\rho)$$

$$= \frac{SCB}{1+r\rho}$$

et

d'où

$$T^2(\rho) = \frac{(Y_{1..} - Y_{2..})^2}{\left(SCR + \frac{SCB}{1+r\rho}\right)} \times \frac{mr}{2(1+r\rho)} \sim \mathcal{L}(mr-1)$$

$$T^2(\rho) = \frac{(Y_{1..} - Y_{2..})^2}{(1+r\rho)SCR + SCB} \times mr(mr-1)$$

3) Si dans la formule donnant $T^2(\rho)$ dans le cas équilibré, on remplace ρ par son estimateur $\frac{\hat{\sigma}^2_b}{\hat{\sigma}^2}$ ($\hat{\sigma}^2_b$ et $\hat{\sigma}^2$ étant, dans le cas équilibré, des estimateurs sans biais optimaux) on aura $1 + r\hat{\rho} = \frac{SCB \times m(r-1)}{SCR \times (m-1)}$

et donc $$T^2(\hat{\rho}) = \frac{(Y_{1..} - Y_{2..})^2}{SCB} \times \frac{mr \times (mr-1)}{\frac{(mr-1)}{m-1}}$$

.../..

$$T^2(\hat{\rho}) = \frac{\frac{m\,r}{2}(Y_{1..} - Y_{2..})^2}{MSB} = \frac{MST}{MSB} = U^2 \underset{\sim}{H_0} F(1, m_0 - 2)$$

On retrouve donc la statistique du test F utilisé dans le cas équilibré. Cette propriété de " continuité " nous aidera à définir notre test dans le cas où ρ est inconnu et où le plan est déséquilibré.

4) Possibilité de faire un test conservatif :

Si l'on sait que n_{ij} est grand de manière que $\frac{1}{n_{ij}}$ soit négligeable par rapport à ρ la formule donnant $T^2(\rho)$ se simplifie puisqu'on aura :

$$\alpha_{ij} \approx \frac{1}{\rho}, \quad \alpha_{io} \approx \frac{m_i}{\rho}, \quad \hat{t}_i \approx Y_{i..} \quad SC(\rho) \approx 0$$

$$\text{et donc} \quad T^2(\rho) \approx \frac{m_1\, m_2}{m_0} \frac{(Y_{1..} - Y_{2..})^2}{SCR/n - 2} \times \frac{1}{\rho}$$

On remarque que $T^2(\rho)$ est une fonction décroissante de ρ. Donc pour une valeur " assez grande " de ρ soit ρ_1 pour laquelle on est " sur " que $\rho_1 > \rho$, on aura $T^2(\rho_1) < T^2(\rho)$.

On peut donc faire un test consernatif:

Un test de niveau α est défini par le domaine de rejet

$$D_{\alpha,\rho} = \{ T^2(\rho) > f_{\alpha,1,n-2} \} \text{ avec } P(D_{\alpha,\rho_0}) = \alpha$$

$$\text{mais } T^2(\rho_1) > f_{\alpha,1,n-2} \Rightarrow T^2(\rho) > f_{\alpha,1,n-2}$$

$$\text{Donc } D_{\alpha,\rho_1} \subset D_{\alpha,\rho}$$

$$\text{et } P(D_{\alpha,\rho_1}) \leq P(D_{\alpha,\rho}) = \alpha$$

On fait donc un test de niveau inférieur ou égal à α. Si on rejette l'hypothèse H_0, on est sur de la rejetter pour la vraie valeur ρ, a un niveau α.

Si on l'accepte (si $T^2(\rho_1) \leq f_{\alpha,1,n-2}$), on ne peut rien dire pour la vraie valeur.

.../..

IV.2 - Test proposé dans le cas où ρ est inconnu (et où le plan est déséquilibré).

Par analogie au cas équilibré (propriété 2) on peut remplacer ρ par un estimateur. Malheureusement la loi de $T^2(\hat{\rho})$ ne sera plus aussi simple. Sa détermination analytique n'est pas aisée et n'a en soi aucun intérêt du point de vue pratique si l'on s'intéresse à la construction de test simple.

La propriété 3 précédente nous amène, à défaut d'un test exact, de proposer le test approché de région de rejet

$$D_\alpha = \{ T^2(\hat{\rho}) \geq f_{\alpha,1,m_0 - 2} \}$$

où $\hat{\rho} = \frac{\hat{\sigma}^2_b}{\hat{\sigma}^2}$, $\hat{\sigma}^2_b$ et $\hat{\sigma}^2$ étant les estimateurs de Henderson de σ^2_b et σ^2. On a choisi les estimateurs de Henderson pour des raisons de simplicité. On pourrait prendre comme estimateurs les Minques de σ^2_b et σ^2. On sait qu'à l'équilibre les Minques se confondent avec les estimateurs de Henderson. La propriété de " continuité " (Quand le plan " tend vers l'équilibre ") du Test reste vraie et on aura toujours $T^2(\hat{\rho}) = U^2$ à l'équilibre, que l'on prenne pour estimateur de ρ un estimateur de Henderson, du Minque ou tout autre estimateur sans biais (pour σ^2_b et σ^2, non pour ρ) qui soit fonction de la statistique exhaustive (complète dans le cas équilibré).

L'estimateur $\hat{\rho}$ n'étant pas permissible ($\hat{\sigma}^2_b$ pouvant être négatif) on prendra plutôt comme estimateur $\tilde{\rho} = \sup(0, \hat{\rho})$ et donc $D_\alpha = \{ T^2(\tilde{\rho}) \geq f_{\alpha,1,m - 2} \}$.

Nous étudions au chapitre IV les propriétés assymptotiques de ce test. Au chapitre V nous comparerons ce test aux tests classiques mentionnés au chapitre II par simulation à défaut de pouvoir le faire autrement.

IV.2.1. - Cas de plusieurs traitements

. Si au lieu de deux traitements on avait plusieurs traitements (1) on peut construire de la même manière un test $T^2(\hat{\rho})$. On aurait :

.../..

$$T^2(\hat{\rho}) = \frac{\sum_{i=1}^{\ell} (\hat{t}_{i\cdot} - \hat{t}_{\cdot\cdot})^2/(\ell-1)}{(SCR + SC(\hat{\rho}))/(n-\ell)} \underset{\text{Approximativement sous } H_0}{\sim} F(\ell-1, n_0-\ell)$$

avec $$\hat{t}_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\hat{\alpha}_{ij} \cdot Y_{ij\cdot}}{\hat{\alpha}_{i\cdot}}$$

et $$SC(\hat{\rho}) = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{m_i} \hat{\alpha}_{ij} \cdot (Y_{ij\cdot} - \hat{t}_{i\cdot}(\hat{\rho}))^2$$

IV.2.2. - Cas ou la variance des effets blocs n'est pas la même dans les deux groupes

Si Var $B_{ij} = \sigma^2_{bi}$ $\quad i = 1, 2 \quad$ (ou $i = 1, \ldots, l$)

Le test peut s'écrire sous une forme un peu différente :

$$T^2(\hat{\rho}) = \frac{\hat{\alpha}_{1\cdot} \hat{\alpha}_{2\cdot}}{\hat{\alpha}_{\cdot\cdot}} \frac{(\hat{t}_1(\hat{\rho}_1) - \hat{t}_2(\hat{\rho}_2))^2}{(SCR + SC(\hat{\rho}))/(n-2)}$$

avec $\hat{\alpha}_{ij} = \frac{1}{\hat{\rho}_i + \frac{1}{n_{ij}}}$, $\hat{\rho}_i = \frac{\hat{\sigma}^2_{bi}}{\hat{\sigma}^2}$, $\hat{\sigma}^2_{bi}$ étant l'estimateur de de Henderson dans le groupe i (ou tout autre estimateur de σ^2_{bi})

et $$SC(\hat{\rho}) = \sum_{ij} \alpha_{ij} \cdot (Y_{ij\cdot} - \hat{t}_{i\cdot}(\hat{\rho}_i))^2$$

.../..

IV.2.3. - Remarque : Le test obtenu dans ce chapître n'est pas le même que celui qu'on aurait obtenu si on avait appliqué la méthode du chapître précédent en prenant pour estimateur de la moyenne $\hat{t}_i(\rho)$ et en remplaçant ρ par $\hat{\rho}$. On aurait comme test :

$$T_0^2(\hat{\rho}) = \frac{\hat{\alpha}_{10}\,\hat{\alpha}_{20}}{\hat{\alpha}_{00}} \quad \frac{(t_1(\hat{\rho}) - t_2(\hat{\rho}))^2}{MSR}$$

IV.2.4. - Modifications possibles de notre test

Il est possible de proposer plusieurs modifications de notre test.

1) $$T_1^2 = \frac{\left[\hat{t}_1(\hat{\rho}) - \hat{t}_2(\hat{\rho})\right]^2}{\left[SC\mathcal{R} + SC(\tilde{\rho})\right] / (n-2)} \times \frac{\tilde{\alpha_{10}} \times \tilde{\alpha_{20}}}{\tilde{\alpha_{00}}}$$

ou $\tilde{\rho} = \sup(0, \hat{\rho})$, cette statistique a l'avantage de suivre assymptotiquement une loi de Khi-deux à un degré de liberté. Au chapitre suivant, on démontre que $\hat{t}_1(\hat{\rho}) - \hat{t}_2(\hat{\rho})$ est assymptotiquement normal et que $\left[SC\mathcal{R} + SC(\rho^*)\right] / (n-2) \times \frac{\alpha_{00}^*}{\alpha_{10}^* \alpha_{20}^*}$, où ρ^* est un estimateur consistant de ρ, tend en probabilité vers la variance de $t_1(\hat{\rho}) - t_2(\hat{\rho})$. $\hat{\rho}$ étant un estimateur consistant de ρ, ce qui est démontré en V.4.2., proposition 5, la normalité assymptotique de T_1 en découle.

2) $$T_2^2 = \frac{\left[\hat{t_1}(\hat{\rho}) - \hat{t_2}(\hat{\rho})\right]^2}{MSR} \times \frac{\tilde{\alpha_{10}} \times \tilde{\alpha_{20}}}{\tilde{\alpha_{00}}}$$

Cette statistique suit assymptotiquement une loi de Khi-deux de un, pour les mêmes raisons que précédemment.

3) $$T_3^2 = \frac{\left[\tilde{t_1}(\tilde{\rho}) - \tilde{t_2}(\tilde{\rho})\right]^2}{MSR} \times \frac{\tilde{\alpha_{10}} \times \tilde{\alpha_{20}}}{\tilde{\alpha_{00}}}$$

On n'a plus la propriété assymptotique, mais $\tilde{t_1}(\tilde{\rho}) - \tilde{t_2}(\tilde{\rho})$ est un estima-

teur sans biais de $t_1 - t_2$, même à distance finie. Ce dernier test et le précédent sont assez semblable au test U_3 de III.4.3.

V - CAS DES GRANDS ECHANTILLONS

V.1 - HYPOTHESES SUR LES CONSTANTES DU PLAN

V.2 - ESTIMATEURS DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

V.3 - TEST DU RAPPORT DE VRAISEMBLANCE

V.4 - PROPRIETES ASSYMPTOTIQUES DES ESTIMATEURS DE HENDERSON

V.4.1. CONVERGENCE DES ESTIMATEURS $\hat{\sigma}_b^2$ ET $\hat{\sigma}^2$ DE HENDERSON

V.4.2. DISTRIBUTION ASSYMPTOTIQUE DE $\hat{\sigma}_b^2$ ET $\hat{\sigma}^2$

V.5 - DISTRIBUTION ASSYMPTOTIQUE DE $T^2(\hat{\rho})$

V.1 - Hypothèses sur les constantes du plan

Quand le plan est déséquilibré, le choix des paramètres qui doivent tendre vers l'infini n'est pas immédiat comme dans le cas équilibré. Les propriétés assymptotiques de U^2 quand le nombre de blocs par groupe (cas équilibré) est grand sont bien connus. La loi de Fisher à 1 et 2 m - 2 degrés de liberté tendant alors vers un Khi-deux à 1 degré de liberté.

Pour étudier les propriétés assymptotiques des estimateurs du maximum de vraisemblance dans un modèle linéaire général, Hartley et Rao (24) ont défini des hypothèses qui reviennent à ce que :

1) $n_{ij} \leq R \quad \forall\, i, j$ R étant une constante

2) $\frac{m_1}{m_2} = c_1$ et $\frac{m_2}{m_1} = c_2$ c_1 et c_2 étant des nombres finis

3) les éléments de la matrice $(X'H^{-1}X)^{-1}$ sont tous plus petits que $\frac{K}{n}$ où K est une constante "universelle".
En fait dans notre cas l'hypothèse 3 découle des deux précédentes

En effet $$(X' H^{-1} X)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_{10}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha_{20}} \end{pmatrix}$$

On voit avec par exemple $\frac{1}{\alpha_{10}} < \frac{K}{2n}$

Donc $\alpha_{10} > \frac{2n}{K}$ or $n < m_0 R = m_1 (1 + c_2) R$

Donc $\alpha_{10} > \frac{2 m_1 (1 + c_2) R}{K}$

On a $n_{ij} > 1$

Donc $\rho + \frac{1}{n_{ij}} < \rho + 1$

.../..

$$\alpha_{ij} > \frac{1}{\rho + 1}$$

$$\alpha_{io} > \frac{m_i}{\rho + 1}$$

et on aura $\alpha_{io} > \frac{n}{K}$

avec $K = \text{Sup}_i \left((\rho + 1)(1 + c_i) R \right)$

V.2 - Estimateurs du maximum de vraisemblance

Ecrivons la vraisemblance du vecteur Y des observations :

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}n} \sigma^{2n} |H|^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(Y-Xt)'H^{-1}(Y-Xt)\right]$$

Le Log de la vraisemblance s'écrira à une constante près :

$$L = -\frac{1}{2}\log|H^{-1}| - \frac{1}{2}\log\sigma^{2n} - \frac{1}{2\sigma^2}(Y-Xt)'H^{-1}(Y-Xt)$$

Les équations du maximum de vraisemblance s'écrivent, les paramètres étant t, σ^2 et ρ :

1) $$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{1}{\sigma^2}\left\{X'H^{-1}Y - (X'H^{-1}X)t\right\} = 0$$

2) $$\frac{\partial L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}(Y-Xt)'H^{-1}(Y-Xt) = 0$$

.../..

3) $$\frac{\partial L}{\partial \rho} = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} H^{-1} A_0 + \frac{1}{2\hat{\sigma}^2} (Y - Xt') H^{-1} A_0 H^{-1}$$

$$(Y - Xt) = 0$$

Ce qui donne :

1) $\Longleftrightarrow$ $\hat{t} = (X'H^{-1} X)^{-1} X'H^{-1} Y$

2) $\Longleftrightarrow$ $\hat{\sigma}^2 = (Y - Xt)' H^{-1} (Y - Xt)/ n$

3) $\Longleftrightarrow$ $\hat{\rho}$ solution de $\hat{\sigma}^2 \operatorname{tr} H^{-1} A_0 = (Y - X\hat{t}) H^{-1} A_0 H^{-1} (Y - X\hat{t})$

$$H^{-1} A_0 = \left[\sum_{ij}^{+} (H_{ij}^{-1})\right]\left[\sum_{ij}^{+} \Pi_{n_{ij}} \Pi'_{n_{ij}}\right] = \sum_{ij}^{+} \left[H_{ij}^{-1} \Pi_{n_{ij}} \Pi'_{n_{ij}}\right]$$

$$= \sum_{ij}^{+} \left[\frac{-\rho_{n_{ij}}}{1+\rho_{n_{ij}}} + 1\right] \Pi_{n_{ij}} \Pi'_{n_{ij}} = \sum_{ij}^{+} \frac{\alpha_{ij}}{n_{ij}} \Pi_{n_{ij}} \Pi'_{n_{ij}}$$

$$\operatorname{tr} H^{-1} A_0 = \sum_{ij} \frac{\alpha_{ij}}{n_{ij}} \operatorname{tr} \Pi_{n_{ij}} \Pi'_{n_{ij}} = \alpha_{00}$$

$$H^{-1} A_0 H^{-1} = \sum_{ij}^{+} \left(\frac{\alpha_{ij}}{n_{ij}} \Pi_{n_{ij}} \Pi'_{n_{ij}}\right)\left(\frac{-\rho}{1+\rho_{n_{ij}}} \Pi_{n_{ij}} \Pi'_{n_{ij}} + \mathrm{II}_{n_{ij}}\right)$$

$$= \sum_{ij}^{+} \left[\frac{\alpha_{ij}}{n_{ij}} \times \frac{-\rho_{n_{ij}}}{1+\rho_{n_{ij}}} \Pi_{n_{ij}} \Pi'_{n_{ij}} + \frac{\alpha_{ij}}{n_{ij}} \Pi_{n_{ij}} \Pi'_{n_{ij}}\right]$$

$$= \sum_{ij}^{+} \left[\frac{\alpha_{ij}^2}{n_{ij}^2} \Pi_{n_{ij}} \Pi'_{n_{ij}}\right]$$

.../..

$$(Y-X\hat{t})H^{-1}A_0H^{-1}(Y-X\hat{t}) = \sum_{ij} \frac{\alpha_{ij}^2}{n_{ij}^2}(Y_{ij} - t_i \mathbb{1}_{n_{ij}})\mathbb{1}_{n_{ij}}\mathbb{1}'_{n_{ij}}$$

$$(Y_{ij} - \hat{t}_i \mathbb{1}_{n_{ij}}) = \sum_{ij} \frac{\alpha_{ij}^2}{n_{ij}^2}(Y'_{ij}\mathbb{1}_{n_{ij}} - n_{ij}\hat{t}_i)^2$$

$$= \sum_{ij} \alpha_{ij}(Y_{ij.} - \hat{t}_i)^2$$

$\hat{\rho}$ est donc solution de l'équation

$$G(\rho, Y, n_{ij}) = \alpha_{00}(SCR + SC(\rho)) - n\sum_{ij}\alpha_{ij}^2(Y_{ij.} - \hat{t}_i)^2 = 0$$

Cas équilibré :

Une substitution directe donne :

$$\hat{\hat{\rho}} = \frac{r-1}{r}\,\frac{SCB}{SCR} - \frac{1}{r}$$

d'où la solution du maximum de vraisemblance :

$$\begin{cases} \hat{\hat{\sigma}}^2 = MSR \\ \hat{\hat{\sigma}}_b^2 = \frac{1}{r}\left[\frac{m-1}{m}\,MSB - MSR\right] \\ \hat{\hat{t}}' = (Y_{1..}, Y_{2..}) \end{cases}$$

.../..

Remarquons que $\hat{\hat{\sigma}}^2$ est biaisé, mais que pour m grand le biais tends vers 0 et les solutions du maximum de vraisemblance se confondent avec celle de Henderson. De plus ces solutions ne sont pas permissibles, pour qu'elles le soient il faut poser une condition supplémentaire : $\rho \geqslant 0$.

Dans le cas général les estimateurs du maximum de vraisemblance de ρ, σ^2 et t sont solution de :

$$\begin{cases} G(\hat{\hat{\rho}}, Y, n_{ij}) = 0 \\ \hat{\hat{\rho}} \geqslant 0 \\ \hat{\hat{\sigma}}^2 = \frac{1}{n}(SCR + SC(\hat{\hat{\rho}})) \\ \hat{\hat{t}}' = \left(\frac{\sum_j \hat{\hat{\alpha}}_{1j} Y_{1'j.}}{\hat{\hat{\alpha}}_{10}} ; \frac{\sum_j \hat{\hat{\alpha}}_{2j} Y_{2j.}}{\hat{\hat{\alpha}}_{20}} \right) \end{cases}$$

$$\hat{\hat{\alpha}}_{ij} = \frac{1}{\hat{\hat{\rho}} + \frac{1}{n_{ij}}} \quad \text{et} \quad \hat{\hat{\alpha}}_{io} = \sum_j \hat{\hat{\alpha}}_{ij}$$

Dans le cas non équilibré, la résolution analytique de ce système n'est pas possible. Le systéme (ou plutôt la première équation) peut se résoudre par des méthodes numériques. De plus cette solution si elle existe doit vérifier une condition supplémentaire à savoir que la matrice $\left(\frac{\partial L}{\partial \theta_r \partial \theta_s} \right)_{\theta = \hat{\hat{\theta}}}$ doit être définie négative. On a noté $\theta_1 = t_1$, $\theta_2 = t_2$, $\theta_3 = \sigma_b^2$, $\theta_4 = \sigma^2$ et $\theta' = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$

Ce qui assurera que la solution trouvée est bien un maximum.

S.R. SEARLE (53) montre que assymptotiquement les estimateurs du maximum de vraisemblance des effets fixes et des composantes de variance sont indépendantes. La matrice d'information du vecteur Y et donc la matrice de covariance assymptotique du vecteur $\hat{\hat{\theta}}$ des estimateurs du maximum de vraisemblance sont calculées.

.../..

Cette matrice est égale à :

$$V_{ML} = \begin{bmatrix} X' V^{-1} X & 0 \\ 0 & \{t_{ij}\} \end{bmatrix}^{-1} \qquad i,j = 3,4$$

avec

$$t_{ij} = \frac{\partial \log |V|}{\partial \theta_i \, \partial \theta_j} + tr\left[\frac{V \, \partial (V^{-1})}{\partial \theta_i \, \partial \theta_j}\right]$$

V.3 - Test du rapport de vraisemblance

Sous l'hypothèse générale, la vraisemblance s'écrit :

$$L_{\hat{\hat{\xi}}, \hat{\hat{\sigma}}^2, \hat{\hat{\rho}}} = \hat{\hat{\sigma}}^{2n} |\hat{\hat{A}}|^{1/2} K$$

K est une constante.

Sous H_0 :

$$L_{\hat{\hat{\xi}}_{H_0}, \hat{\hat{\sigma}}^2_{H_0}, \hat{\hat{\rho}}_{H_0}} = \hat{\hat{\sigma}}^{2n}_{H_0} |\hat{\hat{A}}_{H_0}| K$$

Le rapport de vraisemblance s'écrira :

$$\lambda = \left(\frac{\hat{\hat{\sigma}}^2_{H_0}}{\hat{\hat{\sigma}}^2}\right) \frac{|\hat{\hat{A}}_{H_0}|^{1/2}}{|\hat{\hat{A}}|^{1/2}}$$

avec

$$\hat{\hat{\sigma}}^2_{H_0} = \frac{1}{n} \left(SC + SC_0(\hat{\hat{\rho}}_0)\right)$$

.../..

où $$SC_0(\hat{\hat{\rho}}_0) = \sum_i \hat{\hat{\alpha}}_{i.}^{0} (Y_{i.} - \hat{\hat{t}}_0)$$

$$\hat{\hat{\alpha}}_{i.}^{0} = \frac{1}{\hat{\hat{\rho}}_0 + \frac{1}{n_{i.}}} \quad \text{et} \quad \hat{\hat{t}}_0 = \left(\sum_i \hat{\hat{\alpha}}_{i.}^{0} Y_{i.}\right) / \hat{\hat{\alpha}}_{..}^{0}$$

$\hat{\hat{\rho}}_0$ étant solution de l'équation

$$G^0(\hat{\hat{\rho}}_0, Y, n_{i.}) = 0$$

avec

$$G^0(\hat{\hat{\rho}}_0, Y, n_{i.}) = \hat{\hat{\alpha}}_{..}^{0}(SCR + SC_0(\hat{\hat{\rho}}_0)) - n \sum_i \hat{\hat{\alpha}}_{i.}^{0} (Y_{i.} - \hat{\hat{t}}_0)$$

et donc

$$-2 \log \lambda \xrightarrow[n_0 \to \infty]{} \chi^2(1).$$

A condition de calculer les estimateurs du maximum de vraisemblance de ρ, $\hat{\hat{\rho}}$ et $\hat{\hat{\rho}}_0$, numériquement ce qui est relativement simple, on peut donc faire le test du rapport de vraisemblance dont les propriétés assymptotiques sont connues.

V.4 - Propriétés assymptotiques des estimateurs de Henderson.

V.4.1. - Convergence des estimateurs $\hat{\sigma}_b^2$ et $\hat{\sigma}^2$ de Henderson

L'utilisation du Lemme 1 chapitre II nous permettra de calculer les variances $\hat{\sigma}_b^2$ et $\hat{\sigma}^2$.

.../..

Proposition 1

a) $$\mathrm{Var}\ \hat{\sigma}_b^2 = \alpha \sigma_b^4 + \beta \sigma^4 + \gamma \sigma^2 \sigma_b^2$$

avec

$$\alpha = 2c_1^2\left(\sum_{ij} n_{ij}^2 + \sum_i \left(\frac{\sum_j n_{ij}^2}{n_{i0}}\right)^2 - K_0 - \sum_{ij} \frac{n_{ij}^3}{n_{i0}}\right)$$

$$\beta = 2\left(c_1^2(m_0 - 2) - c_2^2 m_0\right)$$

et

$$\gamma = 2\left(2c_1^2(n_0 - K_0) - c_2^2 n\right)$$

et

$$c_1 = \frac{1}{k_2(m_0 - 2)}\ ,\quad c_2 = \frac{1}{k_2(n - m_0)}\ ,\quad K_0 = \sum_{ij} \frac{n_{ij}^2}{n_{i0}}$$

b)

$$\mathrm{Var}\ \hat{\sigma}^2 = \frac{2\sigma^4}{n - m_0}$$

c)

$$\mathrm{Cov}\left(\hat{\sigma}_b^2, \hat{\sigma}^2\right) = -2c_2\sigma^4$$

Démonstration :

a) $\hat{\sigma}_b^2 = Y'QY$ avec $Q = cA - c_1B - c_2I$; $c = c_1 + c_2$ d'ou (Lemme 1)

$$\mathrm{Var}\ Y'QY = 2\,\mathrm{Tr}(QV)^2 + 4\,t'X'QVQXt$$

$$QV = c_1\sigma_b^2 A_0 + c\sigma^2 A - c_1\sigma^2 B - c_1\sigma_b^2 B_1 - c_2\sigma^2 I$$

.../..

$$QVQ = c_1^2 \sigma_b^2 A_0 + c_1^2 \sigma_b^2 B_2 - c_1^2 \sigma_b^2 B_1' + (c_1 c_2 \sigma_b^2 - c_1 c \sigma_b^2) B_1$$
$$+ (c_1^2 - c_2^2)\sigma^2 A - c_1^2 \sigma^2 B + c_2^2 \sigma^2 I$$

$$QVQV = (c_1^2 A_1 + c_1^2 B_4 - c_1^2 B_5 - c_1^2 B_3)\sigma^4$$
$$+ \left[(c_1^2 - c_2^2)A - c_1^2 B\right]\sigma^4 + \left[(c_1^2 - c_2^2)A_0 - c_1^2 B_1 + c_1^2 A_0 + c_1^2 B_2\right.$$
$$\left. - c_1^2 B_1' - c_1^2 B_3\right]\sigma^2 \sigma_b^2$$

$$t'X'AXt = t'X'BXt = t'X'I_n Xt = \sum_i n_{i0} t_i^2$$

$$t'X'B_2 Xt = \sum_{ij} n_{ij}^2 t_i^2$$

$$t'X'A_0 Xt = \sum_{ij} n_{ij}^2 t_i^2 = t'X'B_1 Xt = t'X'B_1' Xt$$

d'où $t'X'QVQXt = (c_1^2 + c_1^2 - c_1^2 + c_1 c_2 - c_1^2 - c_1 c_2)\sigma_b^2 \sum n_{ij}^2 t_i^2$

$$+ (c_1^2 - c_2^2 - c_1^2 + c_2^2)\sigma^2 \sum n_{i0} t_i^2 = 0$$

De plus $\operatorname{tr} A_1 = \sum n_{ij}^2$ et $\operatorname{tr} A = n_0$; $\operatorname{tr} B = Q$;

$\operatorname{tr} A_0 = n$; $\operatorname{tr} B_1 = K_0$; $\operatorname{tr} B_2 = \sum_{ij} \frac{n_{ij}^2}{n_{i0}} = K_0$

$\operatorname{tr} B_1' = K_0$; $\operatorname{tr} B_3 = \sum_{ij} \frac{n_{ij}^2}{n_{i0}}$

$\operatorname{tr} B_4 = \sum_i \left(\frac{\sum_j n_{ij}^2}{n_{i0}}\right)^2$; $\operatorname{tr} B_5 = K_0$

et le résultat (a).

.../..

b) On peut utiliser le résultat 1 du chapître II.

$\frac{n - m_0}{\sigma^2}\ \hat{\sigma}^2$ suit une loi de $\chi^2\ (n - m_0)$ de variance $2\ (n - m_0)$

$\Leftrightarrow$ Var $\hat{\sigma}^2 = \frac{2\ (n - m_0)\ \sigma^4}{(n - m_0)^2} = \frac{2\ \sigma^4}{n - m_0}$

On peut appliquer le Lemme 1 sachant que $\hat{\sigma}^2 = \frac{Y'(I - A)Y}{n - m}$

c)

$$Cov(\hat{\sigma}_0^2, \hat{\sigma}^2) = Cov(Y'QY, Y'RY) = 2\,tr\,QVRV + 4\mu'QVR\mu$$

Dans notre cas :

$$RV = VR = \sigma^2 (I - A)/(n - m_0)$$

$$Q = cA - c_1 B - c_2 I$$

$$QVR = c_3 (cA - c_1 B - c_2 I)\sigma^2 (I - A)$$

$$= c_3 c_2 \sigma^2 (A - I) \quad \text{avec} \quad c_3 = (n - m_0)^{-1}$$

$$\Rightarrow t'X'QVRXt = 0$$

$$QVRV = c_3 c_2 \sigma^4 (A - I)$$

$$\text{d'où} \quad Cov(\hat{\sigma}_0^2, \hat{\sigma}^2) = -2 c_2 \sigma^4 = \frac{-2(m_0 - 2)\sigma^4}{(n - k_0)(n - m_0)}$$

.../..

Proposition 2 : Les estimateurs de Henderson $\hat{\sigma}^2_b$ et $\hat{\sigma}^2$ de notre modèle sont consistants (au sens faible).

Démonstration : Ces deux estimateurs étant sans biais, il suffit de démontrer que leur variance tends vers 0 quand m_0 tends vers ∞.

$$\text{Var}\,\hat{\sigma}^2 = \frac{2\sigma^4}{n - m_0} = \frac{2\sigma^4}{m_0(\bar{r} - 1)} \xrightarrow{m_0 \to \infty} 0$$

$$\text{Var}\,\hat{\sigma}_b^2 = \alpha\sigma_b^4 + \beta\sigma^4 + \gamma\sigma^2\sigma_b^2$$

il suffit de montrer que α, β et γ tendent vers 0 quand m_0 tend vers l'infini.

Notons $\varphi_i = \frac{\sum_j n_{ij}^2}{m_i}$ et $\rho_i = \frac{\sum_j n_{ij}^3}{m_i}$ et $\varphi = \frac{\sum_{ij} n_{ij}^2}{m_0}$

Par hypothèse, $n_{ij} \leq R \Rightarrow \bar{r} \leq R$

et $n_{ij}^2 < R^2$, $n_{ij}^3 < R^3$

$$\frac{\sum n_{ij}^2}{n_{i0}} < \frac{m_i R^2}{m_i \bar{r}_i} = \frac{R^2}{\bar{r}_i}$$

donc $\frac{\varphi_i}{\bar{r}_i} < R^2$ et $\frac{\rho_i}{\bar{r}_i} < R^3$

.../..

$$\alpha = 2\left(\sum_{ij} n_{ij}^2 + \sum_i \left(\frac{\sum_j n_{ij}^2}{n_{i0}}\right)^2 - K_0 - \sum_{ij} \frac{n_{ij}^3}{n_{i0}}\right) \Big/ (n-K_0)^2$$

$$= 2\left[m_0 \varphi + \sum_i \left(\frac{\varphi_i}{\bar{r}_i}\right)^2 - \sum_i \frac{\varphi_i}{\bar{r}_i} - \sum_i \frac{\ell_i}{\bar{r}_i}\right] \Big/ m_0^2 \left(\bar{r} - \frac{K_0}{m_0}\right)^2$$

$$= \frac{2\left(\varphi + \dfrac{\text{constante}}{m_0}\right)}{m_0\left(\bar{r} - \dfrac{K_0}{m_0}\right)} \xrightarrow{m_0} 0$$

$$\beta = 2\left(\frac{1}{(n-K_0)^2} - \frac{m_0(m_0-2)^2}{(n-K_0)^2(n-m_0)^2}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{m_0^2\left(\bar{r} - \dfrac{K_0}{m_0}\right)^2} - \frac{m_0^3\left(1-\dfrac{2}{m_0}\right)^2}{m_0^4\left(\bar{r} - \dfrac{K_0}{m_0}\right)^2(\bar{r}-1)^2}\right) \xrightarrow{m_0} 0$$

$$\gamma = 2\left(\frac{2}{n-K_0} - \frac{n(m_0-2)^2}{(n-K_0)^2(n-m_0)^2}\right)$$

$$= 2\left(\frac{2}{m_0\left(\bar{r} - \dfrac{K_0}{m_0}\right)^2} - \frac{m_0^3 \bar{r}\left(1-\dfrac{2}{m_0}\right)^2}{m_0^4\left(\bar{r} - \dfrac{K_0}{m_0}\right)^2(\bar{r}-1)}\right) \xrightarrow{m_0} 0$$

Remarque : $m_0 \alpha \longrightarrow 2 \frac{\varphi}{\pi}$

$$m_0 \beta \longrightarrow - \frac{2}{\pi (\pi - 1)^2}$$

$$m_0 \delta \longrightarrow - \frac{2}{(\pi - 1)^2}$$

$$\text{Var } \sqrt{m_0}\, \hat{\sigma}_b^2 \longrightarrow 2 \frac{\varphi}{\pi} \sigma_b^4 - \frac{2\sigma^4}{\pi(\pi-1)^2} - \frac{2\sigma^2\sigma_b^2}{(\pi-1)^2}$$

V.4.2. - Distribution assymptotique de $\hat{\sigma}_b^2$ et $\hat{\sigma}^2$

Proposition 3

a) $\sqrt{m_0}(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2) \xrightarrow{m_0} \mathcal{N}(0, v)$ avec $v = \left(\frac{2\sigma^4}{\pi - 1}\right)^{1/2}$

b) $\sqrt{m_0}(\hat{\sigma}_b^2 - \sigma_b^2) \xrightarrow{m_0} \mathcal{N}(0, v_b)$

avec $v_b = \left[\frac{2}{\pi(\pi-1)^2} \left/ \varphi(\pi-1)^2 \sigma_b^4 - \sigma^4 - \pi\sigma^2\sigma_b^2\right.\right]^{1/2}$

c) $\text{Cov}\left(\sqrt{m_0}\, \hat{\sigma}_b^2, \sqrt{m_0}\, \hat{\sigma}^2\right) \longrightarrow v_{ea} = \frac{-2\sigma^4}{\pi(\pi-1)}$

.../..

Démonstration

a) On sait que la distribution assymptotique d'un $(\chi^2 (n) - n) / \sqrt{2n}$ est $N(0, 1)$. (Cramer (16))
On en déduit aisément la distribution assymptotique de $\sqrt{m_0}\ (\hat{\sigma}^2 - \sigma^2)$ quand $m_0 \to \infty$.

b) On avait vu, (résultat 2 Ch. II) que MSB ne suit pas une loi proportionnelle à un χ^2.
Déterminons d'abord la distribution assymptotique de MSB.

MSB = Y'QY avec rang Q = $m_0 - 2$

Ecrivons $Y = \begin{pmatrix} Y_{11} \\ \vdots \\ Y_{ij} \\ \vdots \end{pmatrix}$ et notons $Z_{ij} = Y_{ij}$. et $Z = \begin{pmatrix} Z_{11} \\ \vdots \\ Z_{ij} \\ \vdots \end{pmatrix}$

$$MSB = \frac{1}{m_0 - 2} \sum_{ij} n_{ij} \left(Z_{ij} - \frac{\sum_{ij} n_{ij} Z_{ij}}{n_{..}} \right)^2 = Z' Q_0 Z$$

$$Z = DY \text{ avec } D = \begin{pmatrix} \frac{1}{n_{11}} \mathbb{1}'_{n_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{n_{ij}} \mathbb{1}'_{n_{ij}} \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

et donc $Var\, Z = DVD'$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_1^2 + \frac{\sigma^2}{n_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} = V_Z \text{ matrice diagonale}$$

$$Z' Q_0 Z = Y' D' Q_0 D Y = Y' Q Y$$

d'où $Q = D' Q_0 D$

$$\Rightarrow rg\, Q = rg\, D' Q_0 D = rg\, D' D Q_0 \leqslant rg\, Q_0$$

.../..

Donc rg $Q_0 \geq m_0 - 2$, de plus l'ordre de Q_0 est m_0

Donc $m_0 - 2 \leq$ rg $Q_0 \leq m_0$

Notons r_0 le rang de Q_0, on a $r_0 \to \infty$ quand $m_0 \to \infty$.

Faisons le changement de variable

$Z_1 = D_1 Z$ avec

$$D_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\sigma_{11}^2}} & & 0 \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\sigma_{ij}^2}} \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{avec } \sigma_{ij}^2 = \sigma_b^2 + \frac{\sigma^2}{n_{ij}}$$

On aura $Var\ Z_1 = D_1 (Var\ Z) D_1' = I_{m_0}$ et notons

$$E Z_1 = \mu$$

On peut écrire $Z = D_1^{-1} Z_1$ avec $D_1^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma_{11}^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ & & \sigma_{ij} \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$

d'où $MSB = Y'QY = Z'Q_0 Z = Z_1' Q_1 Z_1$

$$= Z_1' D_1^{-1} Q_0 D_1^{-1} Z_1$$

avec $Q_0 = D_1^{-1} Q_1 D_1^{-1}$ et D_1^{-1} régulière

$\Rightarrow Q_1 = D_1 Q_0 D_1 \Rightarrow$ rg $Q_1 =$ rg $Q_0 = r_0$

.../..

donc $MSB = Z_1' Q_1 Z_1$

avec $Var\, Z_1 = I_{m_0}$ et $E Z_1 = \mu$

Q_1 est une matrice symétrique de rg r_0.

Il existe une matrice orthogonale P telle que Q_1 s'écrive

$$Q_1 = P' \begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & d_{r_0} & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} P$$

les λ_i sont les valeurs propres non nulles de Q_1.

Posons $Z_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \sqrt{d_{r_0}} & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} P Z_1$ et donc $Z_1 = P' \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{d_1}} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{d_{r_0}}} & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} Z_2$

donc $MSB = Z_1' Q_1 Z_1 = Z_2' \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{d_1}} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{d_{r_0}}} & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} P P' \times$

$$\times \begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & d_{r_0} & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} P P' \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{d_1}} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{d_{r_0}}} & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$PP' = I_{m_0}$ car P matrice orthogonale.

$$\Rightarrow MSB = Z_2' \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{r_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Z_2 = \sum_{i=1}^{r_0} Z_{2i}^2 \qquad \text{avec } Z_2 = \begin{pmatrix} Z_{21} \\ \vdots \\ Z_{2i} \\ \vdots \\ Z_{2m_0} \end{pmatrix}$$

.../..

avec

$$\text{Var } Z_2 = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{r_0} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E\, Z_2 = \delta_1 = \begin{pmatrix} \delta_{11} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Le vecteur Z_2 est gaussien et les Z_{2i}^2 sont des v.a. indépendantes de variance σ_i^* et de moyenne μ_i^* (dont les valeurs ne nous intéressent pas en soi). Donc MSB est assymptotiquement normal (théorème central limite dans le cas de v.a.i. non identiquement distribuées) (Cramer (16).

Distribution assymptotique de $\hat{\sigma}_b^2$:

MSB est assymptotiquement normal
$\hat{\sigma}^2$ " } MSB - $\hat{\sigma}^2$ est assymptotiquement normal

$\Longleftrightarrow \hat{\sigma}_b^2 = \frac{1}{k_2}$ (MSB - $\hat{\sigma}^2$) est assymptotiquement normal

(en appliquant la S méthode de RAO (47) avec G (θ) = $\bar{r} \neq 0$).

Le calcul des variances assymptotiques est immédiat en utilisant les résultats de la proposition 2.

Proposition 4

a) $\hat{\rho}$ est un estimateur consistant (au sens faible) de ρ

b) $\sqrt{m_0}\ (\hat{\rho} - \rho) \xrightarrow{L} N\ (0, v_\rho)$

ou $v_\rho = \frac{2}{\bar{r}\ (\bar{r} - 1)^2}\ (Q(\bar{r} - 1)^2\ \sigma^2 + (\bar{r} - 2)\ \rho - \bar{r}\ (\bar{r} - 1)\ \sigma_b^2 - 1)$

Théorème 1 (Slutsky)

. Soit $X_n \xrightarrow{L} X$ (converge en loi)

et $Y_n \xrightarrow{P} c$ (converge en probabilité) ou c est une constante finie.

.../..

Alors $X_n / Y_n \xrightarrow{L} X/C$ si $C \neq 0$

. La convergence en probabilité vers une constante est équivalente à la convergence en loi vers cette constante.

La démonstration de ce théorème classique peut être trouvée dans divers ouvrages classiques en particulier dans le R.J. Serfling (55).

Application immédiate : On a vu que :

$$\hat{\sigma}_b^2 \xrightarrow{P} \sigma_b^2 \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$$

donc $\hat{\rho} = \dfrac{\hat{\sigma}_b^2}{\hat{\sigma}^2} \xrightarrow{P} \dfrac{\sigma_b^2}{\sigma^2} = \rho$ est le résultat a) de la proposition 4.

Pour démontrer le résultat b), utilisons un théorème de RAO (47).

Théorème 2

Soit T_N une statistique k- dimensionnelle $(T_{1N}, T_{2N} \ldots T_{kN})$ telle que la distribution assymptotique de $\{\sqrt{N}(T_{1N} - \theta_1), \ldots, \sqrt{N}(T_{kN} - \theta_k)\}$ est une k- variable normale de moyenne 0 et de matrice de covariance $\Sigma = (\sigma_{ij})$

De plus soit g une fonction de k variables qui est totalement différentiable. Alors la distribution assymptotique de $\sqrt{N}\, u_N = \sqrt{N}\left[g(T_{1N}, \ldots T_{kN}) - g(\theta_1, \ldots \theta_k)\right]$ est normale de moyenne 0 et de variance

$$v(\theta) = \sum_i \sum_j \sigma_{ij} \cdot \frac{\partial g}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial \theta_j},$$

pourvu que $v(\theta) \neq 0$

Application : $N = m_0$, $k = 2$

$$T_1 = \hat{\sigma}_b^2 \text{ et } T_2 = \hat{\sigma}^2, \quad \theta_1 = \sigma_b^2 \text{ et } \theta_2 = \sigma^2$$

$$g = \frac{T_1}{T_2} = \frac{\hat{\sigma}_b^2}{\sigma^2}$$

.../..

$$\sigma_{11} = v_b^2 \; ; \; \sigma_{22}^2 = v^2 \quad \text{et} \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} = v_{ca}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta_1} = \frac{1}{\sigma^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial \theta_2} = -\frac{\sigma_b^2}{\sigma^4} = -\frac{\rho}{\sigma^2}$$

donc $$v(\theta) = v_b^2 \times \frac{1}{\sigma^4} + v^2 \times \frac{-\rho}{\sigma^2} + 2 v_{ca}^2 \times \frac{-\rho}{\sigma^4}$$

$$= \frac{2\left(\varphi(\bar{r}-1)^2 \sigma_b^4 - \sigma^4 - \bar{r}\sigma^2\sigma_b^2\right)}{\bar{r}(\bar{r}-1)^2 \sigma^4} - \frac{2\sigma^4\sigma_b^2}{(\bar{r}-1)\sigma^4}$$

$$+ 2\frac{-2\sigma^4}{\bar{r}(\bar{r}-1)} \times \frac{-\rho}{\sigma^4}$$

$$= 2\left[\frac{\varphi}{\bar{r}}\rho^2 - \frac{1}{\bar{r}(\bar{r}-1)^2} - \frac{1}{(\bar{r}-1)^2}\varphi - \frac{1}{\bar{r}-1}\sigma_b^2 + \frac{2}{\bar{r}(\bar{r}-1)}\rho\right]$$

$$= 2\left[\frac{\varphi}{\bar{r}}\rho^2 + \frac{\bar{r}-2}{\bar{r}(\bar{r}-1)^2}\rho - \frac{1}{\bar{r}-1}\sigma_b^2 - \frac{1}{\bar{r}(\bar{r}-1)^2}\right]$$

et donc :

$$v_\rho = \frac{2}{\bar{r}(\bar{r}-1)^2}\left(\varphi(\bar{r}-1)^2\rho^2 + (\bar{r}-2)\rho - \bar{r}(\bar{r}-1)\sigma_b^2 - 1\right)$$

.../..

Proposition 5

Soit $\tilde{\rho} = \text{Sup}\ (0, \hat{\rho})$.
$\tilde{\rho}$ est un estimateur consistant (au sens faible) de ρ.

Démonstration

On a vu, dans la proposition 4 que $\hat{\rho}$ est un estimateur consistant de ρ, c'est à dire que :

$$\hat{\rho} \xrightarrow{P} \rho$$

Ce qui est équivalent à :

$$\forall \delta > 0,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall m_0 \geq N\ \text{Prob}\{\omega / |\hat{\rho}_{m_0}(\omega) - \rho| \geq \delta\} < \varepsilon$$

Soit $\hat{\Omega} = \{\omega / |\hat{\rho}_{m_0}(\omega) - \rho| \geq \delta\}$

et $\tilde{\Omega} = \{\omega / |\tilde{\rho}_{m_0}(\omega) - \rho| \geq \delta\}$

Il est évident que si $|\text{Sup}(0,\hat{\rho}) - \rho| > \delta \Rightarrow |\hat{\rho} - \rho| > \delta$

et donc que $\tilde{\Omega} \subset \hat{\Omega}$

d'où $\text{Prob}(\tilde{\Omega}) < \text{Prob}(\hat{\Omega})$

C'est à dire si $\text{Prob}(\hat{\Omega}) < \varepsilon \Rightarrow \text{Prob}(\tilde{\Omega}) < \varepsilon$

Ce qui démontre bien que $\tilde{\rho} \xrightarrow{\text{Prob}} \rho$

V.5 - Distribution assymptotique de $T^2(\hat{\rho})$

Quand ρ est connu, il est immédiat que $T^2(\rho)$ a pour loi assymptotique quand m_0 tend vers l'infini, une loi de Khi-deux à un degré de liberté. $\hat{\rho}$ étant un estimateur consistant de ρ, il est naturel qu'on s'attende à ce que la loi assymptotique

.../..

de $T^2(\hat{\rho})$ soit aussi celle d'un Khi-deux à un degré de liberté. C'est ce que montre le théorème suivant dont la démonstration m'a été suggérée par Mr. Jean Coursol.

Théorème 3 : Notons $r_{ih} = \sum_{j=1}^{m_i} \mathbb{1}_{(n_{ij}=h)}$ (R_{ih} est le nombre de blocs de h éléments). Soit $R_{ih} = \{R_{ih}^*; R_{ih}^*\}$ correspond a un plan de base $N^* = (n_{ij}^*)$, alors que R_{ih} correspond au plan dupliqué $N = (n_{ij})$. $\mathbb{1}_{(n_{ij}=h)} = 1$ si $n_{ij} = h$ et 0 sinon.

Alors

$$\sqrt{\xi}\left[\hat{t}_1(\hat{\rho}) - \hat{t}_2(\hat{\rho}) - (t_1 - t_2)\right]$$

est distribué assymptotiquement quand ξ tend vers l'infini suivant une loi normale

$$\mathcal{N}\left(0, \sigma_e^2\left(\frac{1}{\sum_{h=1}^{c} \frac{r_{1h}^*}{(\rho + \frac{1}{h})}} + \frac{1}{\sum_{h=1}^{c} \frac{r_{2h}^*}{(\rho + \frac{1}{h})}}\right)\right)$$

Remarques

. Ce théorème permet de déterminer la distribution assymptotique de $T^2(\hat{\rho})$ le déséquilibre étant constant. Le nombre de blocs tend vers l'infini de manière à ce que le nombre de blocs de même taille tende aussi vers l'infini.

. Pour des plans à nombre de blocs très grand mais pour lesquels le nombre de blocs de même effectif peut être petit, c'est à dire des plans qui ne peuvent être considéré comme des dupliqués de plans plus simples, nous n'avons pas mis en évidence la loi assymptotique de $T^2(\hat{\rho})$. Il nous semble néanmoins, même si la démonstration rigoureuse est compliquée, que cette loi est la même, ce qui est d'ailleurs confirmé par les résultats des simulations.

. Un exemple classique en épidémiologie où notre résultat peut être appliqué est le cas des études faites sur des familles, qui sont donc des blocs de taille 2 à 10 (par exemple). En prenant un grand nombre de familles, on peut aisément avoir de grands nombres de familles de même taille.

. Par contre quand il s'agit de l'exemple de l'essai parisien de prévention cardio-vasculaire, les effectifs qu'on a sont difficilement utilisables.

.../..

Démonstration du Théorème 3

Avec les notations de l'énoncé du théorème.

On a déjà supposé précédemment que $1 \leq n_{ij} \leq C$

Alors, soit $r_{ik} = \sum_{i=1}^{m_i} \mathbb{1}_{\{n_{ij} = k\}}$

$$\hat{t}_i(\rho) = \sum_{k=1}^{c} \sum_{j/n_{ij}=k} \alpha_{ij}^{*}(\rho)\, Y_{ij}.$$

avec

$$\alpha_{ij}^{*}(\rho) = \frac{\alpha_{ij}(\rho)}{\alpha_{i0}(\rho)}$$

On a $$\sum_{j/n_{ij}=k} \alpha_{ij}^{*}(\rho)\, Y_{ij} = \sum_{j/n_{ij}=k} \frac{(\rho + \frac{1}{k})^{-1}}{\sum_{k=1}^{c} r_{ik} (\rho + \frac{1}{k})^{-1}} Y_{ij}.$$

$$= \frac{(\rho + \frac{1}{k})^{-1} r_{ik}}{\sum_{k=1}^{c} r_{ik} (\rho + \frac{1}{k})^{-1}} \sum_{j/n_{ij}=k} \frac{Y_{ij}}{r_{ik}}$$

$$= a_{ik}(\rho)\, Z_{ik}$$

avec

$$a_{ik}(\rho) = \frac{(\rho + \frac{1}{k})^{-1} r_{ik}}{\sum_{k=1}^{c} r_{ik} (\rho + \frac{1}{k})^{-1}}$$

.../..

et $Z_{ik} = \frac{1}{n_{ik}} \sum_{j/n_{ik}=k} Y_{ij}.$, et Z_{ih} n'est pas défini si $n_{ik} = 0$

et donc on peut écrire :

$$\hat{\xi}_i(p) = \sum_{k=1}^{c} a_{ik}(p) Z_{ik} \quad \text{, pour les h où } n_{ih} \neq 0$$

Z_{ih} est tel que :

$$E Z_{ik} = t_i.$$

$$\text{Var } Z_{ik} = \frac{1}{n_{ik}^2} \sum_{j/n_{ik}=k} \text{Var } Y_{ij.} = \frac{1}{n_{ik}^2} \times n_{ik} \times \left(\sigma_b^2 + \frac{\sigma^2}{k}\right)$$

$$\text{Var } Z_{ik} = \frac{1}{n_{ik}} \left(\sigma_b^2 + \frac{\sigma^2}{k}\right) = \sigma_{ik}^2$$

en prenant $n_{ik} = \xi\, n_{ik}^*$

On a de façon évidente :

$$\sqrt{\xi}\,(Z_{ik} - t_i) \xrightarrow[\xi \to \infty]{\text{Loi}} \mathcal{N}(0, \sigma_{ik}^{*2})$$

avec $\sigma_{ik}^{*2} = \frac{1}{n_{ik}^*} \left(\sigma_b^2 + \frac{\sigma^2}{k}\right)$

.../..

On a démontré (Proposition 4, b) que

$$\sqrt{m_0}(\hat{\rho} - \rho) \xrightarrow[m_0 \to \infty]{\text{Loi}} \mathcal{N}(0, v_\rho)$$

Ce qui implique :

$$\sqrt{\xi}(\hat{\rho} - \rho) \xrightarrow[\xi \to \infty]{\text{Loi}} \mathcal{N}(0, v_\rho^*)$$

On aura donc :

$$\sqrt{\xi}\left[\begin{pmatrix} z_{11} \\ \vdots \\ z_{1c} \\ z_{21} \\ \vdots \\ z_{2c} \\ \hat{\rho} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_2 \\ \rho \end{pmatrix}\right] \xrightarrow[\xi \to \infty]{\text{Loi}} \mathcal{N}_\ell(0, \Sigma)$$

avec

$$\ell = \sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{c} \mathbb{1}_{\{n_{ik} \neq 0\}} + 1$$

et $P = 2c + 1$ si tous les n_{ih} sont non nuls (ce qui signifirait que l'on a un éventail de base d'effectifs allant de 1 à c). La matrice de covariance Σ est de la forme :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^{*2} & & 0 & & v_{11}\rho \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \sigma_{1c}^{*2} & & v_{1c}\rho \\ & & & \sigma_{21}^{*2} & v_{21}\rho \\ & & & & \vdots \\ & & & & \sigma_{2c}^{*2} \; v_{2c}\rho \\ v_{11}\rho & \cdots & v_{1c}\rho & v_{21}\rho & \cdots \; v_{2c}\rho \; v_\rho^* \end{pmatrix}$$

.../..

Les Z_{ih} étant indépendants et $v_{ihp} = Cov(Z_{ih}, \hat{\rho})$ (valeur qui ne nous intéresse pas en elle-même).

Lemme 1

$$\sqrt{\xi}\begin{pmatrix} \hat{t}_1(\hat{\rho}) - t_1 \\ \hat{t}_2(\hat{\rho}) - t_2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\xi \to \infty]{\text{Loi}} \mathcal{N}(0, v)$$

où

$$v = \begin{pmatrix} v_{11} & 0 \\ 0 & v_{22} \end{pmatrix}$$

et

$$v_{ii} = \frac{6^2}{\sum_{k=1}^{c} \frac{r_{ik}^*}{(\rho + \frac{1}{k})}}$$

Démonstration

Pour démontrer ce lemme utilisons le théorème 4 suivant que nous énonçons sans démonstration.

Théorème 4 (Rao, 47) : Soit T_n une statistique de dimension k $(T_{1n}, \ldots, T_{kn})$ de même distribution assymptotique que dans le théorème 2. Soient $g_1, \ldots g_q$; q fonctions de k variables, telle que chaque g_i soit totalement différentiable. Alors la distribution assymptotique de

$$\sqrt{n}\, u_{in} = \sqrt{n}\left[g_i(T_{1n}, \ldots, T_{kn}) - g_i(\theta_1, \ldots, \theta_k)\right] \quad i = 1, \ldots, q$$

est $\mathcal{N}_q(0, G\Sigma G')$ où $G = \left(\partial g_i / \partial \theta_j\right)$

.../..

Ce théorème est une généralisation du théorème 2. L'application est immédiate.

$$\hat{t}_1(\hat{\rho}) = g_1(z_{11}; \dots; z_{2c}; \hat{\rho})$$

$$\hat{t}_2(\hat{\rho}) = g_2(z_{11}; \dots; z_{2c}; \hat{\rho})$$

Notons pour les comodités du calcul

$$E z_{ik} = \theta_{ik}$$

$$G = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \theta_{11}} & \frac{\partial g_1}{\partial \theta_{12}} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial \theta_{2c}} & \frac{\partial g_1}{\partial \rho} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \theta_{11}} & \frac{\partial g_2}{\partial \theta_{12}} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial \theta_{2c}} & \frac{\partial g_2}{\partial \rho} \end{pmatrix}.$$

d'où

$$G\Sigma = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \frac{\partial g_1}{\partial \theta_{11}} \times \sigma_{11}^{*2} + \frac{\partial g_1}{\partial \rho} \times v_{11\rho} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial \theta_{1k}} \times \sigma_{1k}^{*2} + \frac{\partial g_1}{\partial \rho} \times v_{1k\rho} & \dots \\ \frac{\partial g_2}{\partial \theta_{11}} \times \sigma_{11}^{*2} + \frac{\partial g_2}{\partial \rho} \times v_{11\rho} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial \theta_{1k}} \times \sigma_{1k}^{*2} + \frac{\partial g_2}{\partial \rho} \times v_{1k\rho} & \dots \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{c|c} \frac{\partial g_1}{\partial \theta_{2c}} \sigma_{2c}^{*2} + \frac{\partial g_1}{\partial \rho} \times v_{2c\rho} & \sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{c} \frac{\partial g_1}{\partial \theta_{ik}} \times v_{ik\rho} + \frac{\partial g_1}{\partial \rho} \times v_\rho^* \\ \frac{\partial g_2}{\partial \theta_{2c}} \sigma_{2c}^{*2} + \frac{\partial g_2}{\partial \rho} \times v_{2c\rho} & \sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{c} \frac{\partial g_2}{\partial \theta_{ik}} \times v_{ik\rho} + \frac{\partial g_2}{\partial \rho} \times v_\rho^* \end{array} \right)$$

et $$G \sum G' = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}$$

avec

$$v_{11} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{c} \left(\frac{\partial g_1}{\partial \theta_{ik}} \right)^2 \times c_{ik}^2 + 2 \sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{c} \frac{\partial g_1}{\partial \rho} \times \frac{\partial g_1}{\partial \theta_{ik}} \times v_{ik\rho} + \left(\frac{\partial g_1}{\partial \rho} \right)^2 v_{\rho}^*$$

et de même pour v_{22} en remplaçant g_1 par g_2.
Cette dernière formule se simplifie.

En effet,

$$g_1(\theta_{11}, \dots, \rho) = \hat{t}(\rho) \Big|_{\theta_{11}, \dots \theta_{2c}, \rho} = \sum_{k=1}^{c} a_{1k}(\rho)\, \theta_{1k}$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial \rho}(\theta_{11}, \dots, \rho) = \sum_{k=1}^{c} \theta_{1k} \frac{\partial a_{1k}(\rho)}{\partial \rho}$$

$$\text{et } \frac{\partial g_1}{\partial \rho}(\theta_{11}, \dots, \rho) \Big|_{t_1, \dots, t_1, \rho} = \sum_{k=1}^{c} t_1 \frac{\partial a_{1k}(\rho)}{\partial \rho}$$

$$= t_1 \sum_{k=1}^{c} \frac{\partial a_{1k}(\rho)}{\partial \rho} = t_1 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\sum_{k=1}^{c} a_{1k}(\rho) \right)$$

$$= t_1 \frac{\partial}{\partial \rho}(1)$$

.../..

et $\dfrac{\partial g_i}{\partial \theta_{ia}}(\theta_{11}, \ldots, \rho) = a_{ik}(\rho)$ si i = 1 et 0 si i = 2

et donc v_{11} s'écrit :

$$v_{11} = \sum_{k=1}^{c} a_{1k}^2(\rho)\, \sigma_{ik}^{*2} = \sum_{k=1}^{c} \left[\frac{(\rho+\frac{1}{k})^{-1} n_{ik}}{\sum_{k=1}^{c} n_{ik}(\rho+\frac{1}{k})^{-1}} \right]^2 \times \frac{1}{n_{ik}^{*}} (\rho+\frac{1}{k})\, \sigma^2$$

$$v_{11} = \sum_{k=1}^{c} \frac{(\rho+\frac{1}{k})^{-1} n_{ik} \sigma^2}{\left(\sum_{k=1}^{c} n_{ik}(\rho+\frac{1}{k})^{-1}\right)^2} = \frac{\sigma^2}{\sum_{k=1}^{c} n_{ik}^{*}(\rho+\frac{1}{k})^{-1}}$$

et de même $$v_{2k} = \frac{\sigma^2}{\sum_{k=1}^{c} n_{2k}^{*}(\rho+\frac{1}{k})^{-1}}$$

Calculons $v_{12} = v_{21}$

$$v_{12} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{c} \left[\left(\frac{\partial g_1}{\partial \theta_{ik}}\, \sigma_{ik}^2 + \frac{\partial g_1}{\partial \rho} \times v_{ik}\rho \right) \frac{\partial g_2}{\partial \theta_{ik}} \right]$$

$$+ \left[\sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{c} \frac{\partial g_1}{\partial \theta_{ik}} \frac{\partial g_1}{\partial \theta_{ik}} \times v_{ik}\rho + \frac{\partial g_1}{\partial \rho} \times v_{\rho}^{*} \right] \times \frac{\partial g_1}{\partial \rho}$$

.../..

On a vu précédemment que $\left.\frac{\partial g_3}{\partial \rho}\right|_{t_3,\ldots,\rho} = 0$

et $\left.\frac{\partial g_1}{\partial \theta_{1k}}\right|_{t_3,\ldots} = 0$ si i = 2 et que $\left.\frac{\partial g_2}{\partial \theta_{ik}}\right|_{t\ldots} = 0$ si i = 1

donc $v_{12} = 0$ est le résultat du Lemme.

Fin de la démonstration du Théorème 3

L'utilisation du Lemme précédent donne immédiatement le résultat du Théorème 3.

Application :

Corollaire 1

$$T^2(\hat{\rho}) \xrightarrow[\xi \to \infty]{\text{Loi}} \chi^2(3) \text{ sous } H_0$$

Démonstration : En appliquant le Théorème 3, il vient :

$$\frac{\sqrt{\xi}\left[\hat{t}_3(\hat{\rho}) - \hat{t}_2(\hat{\rho}) - (t_3 - t_2)\right]}{\sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{c} \frac{r_{1k}^*}{\rho + \frac{1}{k}}} + \frac{1}{\sum_{k=1}^{c} \frac{r_{2k}^*}{\rho + \frac{1}{k}}}\right)}} \xrightarrow[\xi \to \infty]{\text{Loi}} \mathcal{N}(0,1)$$

.../..

sous H_0 , $t_1 - t_2 = 0$ et en notant que

$$r_{ik} = r_{ik}^{*} \times \xi \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{c} \frac{r_{ik}}{\rho + \frac{1}{k}} = d_{i0}$$

On a :

$$\frac{\hat{t}_1(\hat{\rho}) - \hat{t}_2(\hat{\rho})}{\sqrt{6^2}} \times \sqrt{\frac{d_{00}}{d_{10} d_{20}}} \xrightarrow[\xi \to \infty]{\text{Loi}} \mathcal{N}(0,1) \quad \text{Sous } H_0$$

et donc $$\frac{(\hat{t}_1(\hat{\rho}) - \hat{t}_2(\hat{\rho}))^2}{6^2} \frac{d_{00}}{d_{10} d_{20}} \xrightarrow[\xi \to \infty]{\text{Loi}} \chi^2(1)$$

Il nous reste à démontrer que $(SCR + SC(\hat{\rho})) / n-2 \xrightarrow{P} \sigma^2$, ce qui est démontré dans le Lemme suivant, pour conclure en appliquant le Théorème de Slutzki (Théorème 1) le résultat du corollaire 1.

Lemme 2 : $$[SCR + SC(\hat{\rho})]/n-2 \xrightarrow[\xi \to \infty]{P} 6^2$$

.../..

Démonstration :

On sait que $\frac{SCR}{n-m_0} \xrightarrow{\mathcal{L}} \sigma^2$ (Proposition 2) et donc

$$\frac{SCR}{n-2} \xrightarrow[\xi \to \infty]{\mathcal{L}} \frac{n-m_0}{n-2}\sigma^2 \longrightarrow \frac{n^*-m_0^*}{n^*}\sigma^2$$

avec

$$n = \xi n^* \quad \text{et} \quad m_0 = \xi m_0^*$$

Démontrons que

$$\frac{SC(\hat{\rho})}{n-2} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{m_0^*}{n^*}\sigma^2$$

$$SC(\hat{\rho}) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{m_i} \hat{\alpha}_{ij.}(\hat{\rho})\left(Y_{ij.}^2 - \hat{t}_{i.}^2(\hat{\rho})\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{m_i} \hat{\alpha}_{ij.}(\hat{\rho})\, Y_{ij.}^2 - \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{m_i} \hat{\alpha}_{ij.}(\hat{\rho})\, \hat{t}_{i.}^2(\hat{\rho})$$

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{m_i} \hat{\alpha}_{ij.} Y_{ij.}^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{c}\sum_{j/n_{ij}=k} \hat{\alpha}_{ij.} Y_{ij.}^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{c}\left(\hat{\rho} + \frac{1}{k}\right)\sum_{j/n_{ij}=k} Y_{ij.}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{c}\left(\hat{\rho} + \frac{1}{k}\right) X_{ik} \quad \text{avec} \quad X_{ik} = \sum_{j/n_{ij}=k} Y_{ij.}^2$$

On peut montrer que

$$EX_{ik} = n_{ik}\left[\left(\sigma_b^2 + \frac{\sigma^2}{k}\right) + t_{i.}^2\right]$$

et $$\text{Var}\, X_{ik} = n_{ik}\left(\sigma_b^2 + \frac{\sigma^2}{k}\right)\left[2\left(\sigma_b^2 + \frac{\sigma^2}{k}\right) + 4t_{i.}^2\right]$$

.../..

En effet $Y_{ij} \sim \mathcal{N}\left(t_i ; \sigma_b^2 + \frac{\sigma^2}{k}\right)$

et donc

$$\frac{Y_{ij.}}{\sigma_b^2 + \frac{\sigma^2}{k}} \sim \chi'^2_{\lambda, \frac{t_i}{\sigma_b^2 + \frac{\sigma^2}{k}}}$$

et sachant que

$$E\left(\chi'^2_{n,\delta^2}\right) = n + \delta^2$$

et que

$$Var\left(\chi'^2_{n,\delta^2}\right) = 2n + 4\delta^2$$

d'où le résultat.

Donc $E\left(X_{ik}/(n-2)\right) = \frac{n_{ik}}{n-2}\left(\sigma_b^2 + \frac{\sigma^2}{k} + t_i^2\right) \xrightarrow[\delta \to \infty]{} \frac{n^*_{ik}}{n^*}\left(\sigma_b^2 + \frac{\sigma^2}{k} + t_i^2\right)$

et $Var\left(X_{ik}/(n-2)\right) = \frac{n_{ik}}{(n-2)^2}\left(\sigma_b^2 + \frac{\sigma^2}{k}\right)\left[2\left(\sigma_b^2 + \frac{\sigma^2}{k}\right) + 4t_i^2\right] \xrightarrow[\delta \to \infty]{} 0$

et $X_{ik}/(n-2) \xrightarrow[\delta \to \infty]{\mathcal{L}} \frac{n^*_{ik}}{n^*}\left(\sigma_b^2 + \frac{\sigma^2}{k} + t_i^2\right)$

de plus sachant que $\hat{\rho} \xrightarrow[\delta \to \infty]{\mathcal{L}} \rho$

On a donc :

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{c}\left(\hat{\rho} + \frac{1}{k}\right)^{-1} X_{ik} \xrightarrow[\delta \to \infty]{\mathcal{L}} \sum_{k=1}^{c}\sum_{i=1}^{a}\left(\rho + \frac{1}{k}\right)^{-1} \frac{n^*_{ik}}{n^*}\left(\sigma_b^2 + \frac{\sigma^2}{k} + t_i^2\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{c}\left(\frac{\sigma^2}{n^*}\, n^*_{ik} + \frac{n^*_{ik}}{\rho + \frac{1}{k}}\, t_i^2\right) = \frac{m_0^*}{n^*}\,\sigma^2 + \frac{1}{\lambda^*}\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{c}\frac{n^{*2}_{ik}\, t_i^2}{\rho + \frac{1}{k}}$$

.../..

De plus d'après le résultat du Lemme 1, il est immédiat que :

$$\hat{t}_{i\cdot}(\hat{\rho}) \xrightarrow{\mathcal{L}} t_i \quad \text{d'où} \quad \hat{t}^2_{i\cdot}(\hat{\rho}) \xrightarrow{\mathcal{L}} t_i^2$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{m_i} d_{ij\cdot}(\hat{\rho})\hat{t}^2_{i\cdot}(\hat{\rho}) = \sum_{i=1}^{q}\sum_{k=1}^{c} n_{ik}\left(\hat{\rho}+\frac{1}{2}\right)^{-1}\hat{t}^2_{i\cdot}(\hat{\rho})$$

$$\xrightarrow[\xi\to\infty]{\mathcal{L}} \sum_{i=1}^{q}\sum_{k=1}^{c} n_{ik}\left(\rho+\frac{1}{2}\right)^{-1} t_i^2$$

d'où

$$\frac{\sum\sum d_{ij\cdot}(\hat{\rho})\hat{t}_{i\cdot}(\hat{\rho})}{n-2} \xrightarrow[\xi\to\infty]{\mathcal{L}} \frac{1}{n^*}\sum_{k=1}^{c}\sum_{i=1}^{q}\frac{n^*_{ik}\, t_i^2}{\rho+\frac{1}{2}}$$

et donc

$$\frac{SC(\hat{\rho})}{n-2} = \sum_{i=1}^{q}\sum_{k=1}^{c}\left(\hat{\rho}+\frac{1}{2}\right)^{-1}\chi^2_{ik} - \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{m_i} d_{ij\cdot}(\hat{\rho})\hat{t}^2_{i\cdot}(\hat{\rho}) \to \frac{m_0^*}{n^*}\sigma^2$$

et

$$\frac{SC + SC(\hat{\rho})}{n-2} \xrightarrow[\xi\to\infty]{\mathcal{L}} \frac{n^* - m_0^*}{n^*}\sigma^2 + \frac{m_0^*}{n^*}\sigma^2 = \sigma^2$$

Remarques :

Les tests F approchés et Quasi F-test ont-ils assymptotiquement une loi de $\chi^2(1)$?

On a

$$\sqrt{\xi}\,(Y_{i\cdot\cdot} - t_{i\cdot}) \xrightarrow[\xi\to\infty]{\text{Loi}} \mathcal{N}(0, v_{i\cdot})$$

avec

$$v_{i\cdot} = \text{Var}\sqrt{\xi}\,Y_{i\cdot\cdot} = \xi\,\text{Var}\frac{\sum_j n_{ij\cdot}\,Y_{ij\cdot}}{n_{i\cdot 0}}$$

$$= \xi\,\frac{1}{n^2_{i\cdot 0}}\sum_j n^2_{ij\cdot}\left(\sigma_b^2 + \frac{\sigma^2}{n_{ij\cdot}}\right) = \frac{\xi}{\xi^2 n^{*2}_{i\cdot 0}}\left[\left(\sum_j \sigma_b^4 n^2_{ij\cdot}\right) + \sigma^2 n_{i\cdot 0}\right]$$

$$= \frac{\sigma_b^4}{n^{*2}_{i\cdot 0}}\,\frac{\sum_j n^2_{ij\cdot}}{\xi} + \sigma^2\,\frac{\sum_j n_{ij\cdot}}{\xi\, n^{*2}_{i\cdot 0}} = \frac{\sigma_b^4}{n^{*2}_{i\cdot 0}}\,\xi\, K_i + n_{i\cdot}^*\,\sigma^2$$

$$+ \frac{\sigma^2}{n^{*2}_{i\cdot 0}}$$

avec $K_i = \dfrac{\sum_j n^2_{ij\cdot}}{n_{i\cdot}}$ finie quand $\xi \longrightarrow \infty$

et donc :

$$\sqrt{s}\,(Y_{1..} - Y_{2..} - (t_1 - t_2)) \xrightarrow[s\to\infty]{\text{Loi}} \mathcal{N}(0, v)$$

avec $$v = \sigma_b^2 \left(\sum_i \frac{n_{i.}^{*} K_i}{n_{i.0}^{*2}} \right) + \sigma^2 \left(\sum_i \frac{1}{n_{i.0}^{*}} \right)$$

et donc $$\frac{\sqrt{s}\,(Y_{1..} - Y_{2..})}{\sqrt{v}} \xrightarrow[s\to\infty]{\text{Loi}} \mathcal{N}(0, 1) \qquad \text{sous } H_0$$

et donc $$\tilde{F} = \frac{(Y_{1..} - Y_{2..})^2}{v/s} \xrightarrow[s\to\infty]{\text{Loi}} \chi^2(1) \qquad \text{sous } H_0$$

avec

$$\frac{v}{s} = \sigma^2 \left(\sum_i \frac{1}{n_{i.0}} \right) + \sigma_b^2 \left(\sum_{ij} \frac{n_{ij}^2}{n_{i.0}^2} \right)$$

On sait que :

$$\frac{n}{n_{.0}\, n_{.0}} MSB \xrightarrow[s\to\infty]{P} \sigma^2 \left(\sum_i \frac{1}{n_{i.0}} \right) + k_2 \left(\sum_i \frac{1}{n_{i.0}} \right) \sigma_b^2 \neq \frac{v}{s}$$

Le test U_F^2 approché n'est donc pas distribué assymptotiquement suivant une loi de $\chi^2(1)$.

.../..

Par contre :

$$\frac{n}{n_{10}n_{20}} MSB' \xrightarrow[\delta \to \infty]{P} \sigma^2\left(\sum_i \frac{1}{n_{i0}}\right) + k_1 \sigma^2\left(\sum_i \frac{1}{n_{i0}}\right)$$

$$= \frac{\nu}{\delta}$$

car

$$\sum_i \frac{1}{n_{i0}} k_j = \sum_{i=1}^{2} \frac{\sum_{j=1}^{n_{ij}} n_{ij}^2}{n_{i0}} \times \frac{n}{n_{10}n_{20}}$$

$$- \frac{\sum_{ij} n_{ij}^2}{n} \times \frac{n}{n_{10}n_{20}}$$

$$= \frac{\sum_j n_{1j}^2 (n_{10}+n_{20})}{n_{10}^2 n_{20}} + \frac{\sum_j n_{2j}^2 (n_{10}+n_{20})}{n_{10}n_{20}^2} - \frac{\sum_{ij} n_{ij}^2}{n_{10}n_{20}}$$

$$= \frac{\sum_j n_{1j}^2}{n_{10}n_{20}} + \frac{\sum_j n_{2j}^2}{n_{10}n_{20}} + \frac{\sum_j n_{1j}^2}{n_{10}^2} - \frac{\sum_{ij} n_{ij}^2}{n_{10}n_{20}} + \frac{\sum_j n_{2j}^2}{n_{20}^2}$$

$$= \sum_{ij} \frac{n_{ij}^2}{n_{i0}^2}$$

et donc le Quasi F-test a assymptotiquement une loi de $\chi^2(1)$.

VI - COMPARAISON PAR SIMULATION DU TEST PROPOSE AVEC LES TESTS HABITUELS

VI.1 - EXPOSE DU PROBLEME

VI.2 - RECHERCHE D'UNE MESURE DU DESEQUILIBRE

VI.2.1. DEFINITION DE L'EFFICACITE ET DE LA MESURE D'UN PLAN DESEQUILIBRE

VI.2.2. ETUDE DE L'EFFICACITE EN FONCTION DE ρ

VI.2.3. ETUDE DE LA MESURE DEFINI μ

VI.2.4. REMARQUES

VI.3 - STRATEGIE DE COMPARAISON

VI.3.1. TEST DE KOLMOGOROV-SMIRNOV

VI.3.2. COMPARAISON DES RISQUES DE PREMIERE ESPECE

VI.3.3. COMPARAISON DES TESTS PAR LEUR PUISSANCE

VI.3.4. CHOIX DES PLANS

VI.3.5. SIMULATION

VI.4 - RESULTATS DES SIMULATIONS

VI.4.1. EXACTITUDE DES TESTS

VI.4.1.1. STATISTIQUE DE KOLMOGOROV-SMIRNOV

VI.4.1.2. RISQUE DE PREMIERE ESPECE

VI.4.2. PUISSANCE DU TEST T

VI.1 - Exposé du problème

Quand dans un même problème, plusieurs tests sont exacts au sens où la loi de leur statistique sous l'hypothèse nulle est exactement connue, il convient de comparer analytiquement, si possible, leur puissance. Dans notre cas, les distributions des statistiques n'étant qu'approchées (sauf dans des cas particuliers) une première étape est de vérifier la qualité de ces approximations par des techniques de simulation à défaut d'un autre moyen. Dans une seconde étape, on comparera leur puissance, tout au moins dans le cas où leur exactitude est approximativement vérifiée.

Le choix des plans (et donc des n_{ij}) à partir desquels la variable Y sera simulée n'est pas facile. Si dans le cas équilibré ce choix est relativement simple, dans notre cas le nombre de plans possibles est évidemment illimité. Les simulations faites pour un plan donné ne sont pas nécéssairement valables pour des plans différents. Il serait souhaitable pourtant que les résultats trouvés pour un plan puissent être généralisés à des plans équivalents, c'est à dire des plans ayant le même "degré de déséquilibre". D'où la nécessité de définir une mesure du déséquilibre d'un plan.

VI.2 - Recherche d'une mesure du déséquilibre

VI.2.1. - Définition de l'efficacité et de la mesure d'un plan déséquilibré

La notion de mesure du déséquilibre d'un plan est une notion relativement récente en statistique. Un article récent de H. Ahrens et R. Pincus (2) aborde ce problème et propose des mesures pour un modèle différent du notre (Anova, un facteur).

Si on note la matrice d'incidence du plan par $N = (n_1 , \ldots , n_m)$ ou n_i est l'effectif du bloc i, par définition une mesure du déséquilibre doit vérifier les points suivants :

(i) être une fonction simple des n_i symétrique.

.../..

(ii) être invariante par k-fois réplication d'un plan $1_k \otimes N = \{n_1, \ldots, n_m, \ldots, n_1, \ldots, n_m\}$ (c'est à dire que $\mu(1_k \otimes N) = \mu(N)$) et par homothétie sur les n_{ij} ($\mu\{kn_{ij}\} = \mu(N)$.

(iii) être le reflet, d'une certaine manière, des propriétés statistiques de l'analyse qu'on fait.

Dans la suite de leurs articles les auteurs étudient deux mesures γ et ν.

$$\gamma(N) = \frac{m}{\bar{n} \sum_i \frac{1}{n_i}} \qquad \text{où} \quad \bar{n} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} n_i$$

et

$$\nu(N) = \frac{1}{m \sum \left(\frac{n_i}{n}\right)^2} = \frac{1}{1 + c^2}$$

avec

$$c^2 = \frac{1}{m} \sum \frac{(n_i - \bar{n})^2}{\bar{n}} = \frac{V^2}{n}$$

V^2 représente la variance des effectifs et c^2 le coefficient de variabilité. Le point (i) est trivial. Les deux propriétés d'invariance nous semblent discutables. Nous y reviendrons par la suite.
Le point (iii) nécessite l'introduction de la notion d'efficacité d'un plan qui est définie, dans le cas d'un problème d'estimation par le rapport de la variance de cet estimateur si le plan est équilibré (avec $n_i = \bar{n}$, $\forall i$) sur la variance de ce même estimateur pour le plan N donné. A partir de cette notion d'efficacité qui est une mesure qui dépend des paramètres statistiques du modèle (entre autres les composantes de la variance) on introduit la mesure du déséquilibre qui elle ne doit dépendre que des paramètres géométriques du modèle (le plan). C'est souvent une borne inférieure de l'efficacité : l'efficacité garantie par le plan

.../..

quelque soient les vraies valeurs des paramètres statistiques.

Si on reprend l'exemple du test F approché, une mesure possible du déséquilibre, dans notre modèle, pourrait être la proximité de la loi de U^2 à celle de F, les deux lois étant confondues à l'équilibre. La loi de U^2 n'étant pas simple même sous H_0, un critère plus abordable serait de comparer les espérances de MST et MSB sous l'hypothèse nulle, à défaut de connaitre l'espérance de U^2. Un plan est alors intuitivement d'autant plus efficace que le rapport de ces espérances est proche de la valeur qu'il a à l'équilibre. Définissons donc l'efficacité par :

$$e = \left.\frac{E_{H_0}(MST)}{E_{H_0}(MSB)}\right|_{N=(\bar{n})} \Big/ \left.\frac{E_{H_0}(MST)}{E_{H_0}(MSB)}\right|_{N=(n_{ij})} = \frac{\dfrac{\sigma^2+\bar{n}\,\sigma_b^2}{\sigma^2+\bar{n}\,\sigma_b^2}}{\dfrac{\sigma^2+k_1\sigma_b^2}{\sigma^2+k_2\sigma_b^2}}$$

c'est à dire :

$$e = \frac{\sigma^2+k_2\sigma_b^2}{\sigma^2+k_1\sigma_b^2} = \frac{1+k_2\rho}{1+k_1\rho}$$

Supposons que les deux groupes ont le même nombre total d'observations : $n_{10} = n_{20}$.

Définissons notre mesure du déséquilibre par : $\mu = \frac{k_2}{k_1}$.

Proposition 1

$0 \leq \mu \leq 1$ et μ est la borne inférieure de e. C'est donc l'efficacité minimale garantie par le plan.

.../..

Démonstration

Par hypothèse $n_{10} = n_{20} = \frac{n}{2}$

$$k_1 = \sum_{i=1}^{2} \frac{\sum_{i=1}^{m_0} n_{ij}^2}{n_{i0}} - \frac{\sum_{ij} n_{ij}^2}{n}$$

$$= \frac{2}{n} \sum_{ij} n_{ij}^2 - \frac{1}{n} \sum_{ij} n_{ij}^2$$

$$= \frac{\sum_{ij} n_{ij}^2}{n}$$

$$k_2 = \frac{n - \frac{2}{n} \sum_{ij} n_{ij}^2}{m_0 - 2}$$

$$k_1 - k_2 = \frac{1}{n} \sum_{ij} n_{ij}^2 - \frac{n - \frac{2}{n} \sum_{ij} n_{ij}^2}{m_0 - 2}$$ est du même signe que

$$\frac{m_0 - 2}{n} \sum_{ij} n_{ij}^2 - n + \frac{2}{n} \sum_{ij} n_{ij}^2$$ car $m_0 > 2$ (sinon le problème serait trivial)

$$= \frac{m_0}{2} \sum n_{ij}^2 - n$$ qui est du même signe que

$$\frac{\sum n_{ij}^2}{n} - \frac{n}{m_0}$$ qui est positif car la variance

des n_{ij}. $V = \frac{1}{m_0} \left[\sum_{ij} n_{ij}^2 - m_0 \left(\frac{n}{m_0} \right)^2 \right]$ est positive

.../..

et donc $\sum_{ij} n_{ij}^2 - \frac{n^2}{m_0} > 0$

$\Rightarrow \frac{\sum_{ij} n_{ij}^2}{n} - \frac{n}{m_0} > 0$

Donc

$$k_1 > k_2 \Rightarrow \frac{k_2}{k_1} < 1$$

car k_1 et k_2 sont positifs, ce qui est immédiat.

D'où le résultat :

$$0 < \frac{k_2}{k_1} < \frac{1 + k_2\rho}{1 + k_1\rho} < 1$$

VI.2.2. - Etude de l'efficacité en fonction de ρ

A μ fixé, on voit que l'efficacité est maximum quand ρ est égal à zéro et alors le déséquilibre du plan a peu d'influence. Néanmoins si le test U^2 est alors exact, ce n'est pas le plus puissant. Le critère d'efficacité pris ne tient compte que de la proximité des lois sous H_0.

On voit aussi que quand ρ augmente l'efficacité diminue sans être inférieure à μ.

.../..

VI.2.3. - Etude de la mesure définie μ

Proposition 2

a) μ est invariable par homothétie sur les n_{ij}.

b) μ augmente par k-réplication du plan.

c) Assymptotiquement quand m_0 est grand, μ est équivalente à ν.

Démonstration

a) Soit $N = (n_1, \ldots, n_{ij}, \ldots)$ et $N' = (kn_{11}, \ldots, kn_{ij}, \ldots)$

$$\mu(N') = \frac{\dfrac{kn - \dfrac{2}{kn}\sum_{ij}(kn_{ij})^2}{m_0 - 2}}{\dfrac{\sum_{ij}(kn_{ij})^2}{kn}}$$

$$= \frac{\dfrac{k\,n - \dfrac{2}{n}\sum_{ij} n_{ij}^2}{m_0 - 2}}{k\,\dfrac{\sum_{ij} n_{ij}^2}{n}} = \mu(N)$$

b) Soit $N = (n_{11}, \ldots, n_{ij}, \ldots, n_{2,m_2})$ et $N'' = (\underbrace{N, N, \ldots, N}_{l \text{ fois}})$

$$\mu(N'') = \frac{\dfrac{ln - \dfrac{2}{ln}\sum_{ijl} n_{ij}^2}{lm_0 - 2}}{\dfrac{\sum_{ijl} n_{ij}^2}{ln}}$$

$$\mu(N'') = \frac{(ln - \dfrac{2}{n}\sum_{ij} n_{ij}^2)/(lm_0 - 2)}{\dfrac{\sum_{ij} n_{ij}^2}{n}}$$

.../..

Il faut démontrer que $\mu(N'') < \mu(N)$

C'est à dire que :

$$\frac{\ell n - \frac{2}{n}\sum_{ij} n_{ij}^2}{\ell m_0 - 2} \overset{?}{>} \frac{n - \frac{2}{n}\sum_{ij} n_{ij}^2}{m_0 - 2}$$

$$\Leftrightarrow \quad (m_0 - 2)\left(\ell n - \frac{2}{n}\sum_{ij} n_{ij}^2\right) - (\ell m_0 - 2)\left(n - \frac{2}{n}\sum_{ij} n_{ij}^2\right) \overset{?}{>} 0$$

$$n\ell m_0 - 2\ell n - \frac{2m_0}{n}\sum_{ij} n_{ij}^2 + \frac{4}{n}\sum_{ij} n_{ij}^2 - n\ell m_0 + 2n$$

$$+ \frac{2\ell m_0}{n}\sum_{ij} n_{ij}^2 - \frac{4}{n}\sum_{ij} n_{ij}^2 \overset{?}{>} 0$$

$$2n(1-\ell) + 2\frac{m_0}{n}\sum n_{ij}^2(\ell - 1) \overset{?}{>} 0$$

$$2(\ell - 1)\left(\frac{m_0}{n}\sum_{ij} n_{ij}^2 - n\right) \overset{?}{>} 0$$

Or $\frac{m_0}{n}\sum_{ij} n_{ij}^2 - n$ est du même signe que $\sum_{ij} n_{ij}^2 - \frac{n^2}{m_0}$ qui est positif d'où le résultat.

.../..

c) $\nu = \frac{1}{1+c^2}$ avec $c^2 = \frac{V}{r^2}$ et $V = \frac{1}{m_0}\left(\sum_{ij} n_{ij}^2 - m_0 \bar{r}^2\right)$

Il est facile de montrer que $\mu = \frac{m\nu - 1}{m - 1}$.

et donc que $\lim_{m_0 \to \infty} \mu = \nu$

La limite s'entend au sens ou tous les autres paramètres du plan restent constants.

Mais ν n'est pas une borne inférieure de l'efficacité définie.

VI.2.4. - Remarques

1 - Les propriétés d'Ahrens et Picpus (ii) d'invariance indiquée plus tôt ne nous semblent pas indispensables pour définir une mesure du déséquilibre. Le fait que μ soit croissante par duplication du plan est conforme aux propriétés assymptotiques de l'analyse qu'on fait et qui sont justement relativesà une augmentation du nombre de blocs sans augmentation importante des effectifs par blocs. Si dans le cas équilibré la mesure du plan, égale à un, reste inchangé, dans le cas déséquilibré on s'attend à de meilleures performances au sens ou le déséquilibre diminue.

Ainsi pour prendre un exemple simple, si on dispose d'un effectif total $n = 20$, d'un nombre de blocs par groupe m_i égal à 10, on peut construire le plan $N_1 = \{1, 1, 1, \ldots, 1\}$ qui est équilibre de mesure $\mu = 1$.

Le plan de "déséquilibre maximum" que l'on peut construire sera $N_2 = \{10, 0, 0, \ldots 0, 10, 0, \ldots 0\}$ et $\mu(N_2) = 0$. Si l'on dispose d'un effectif total égal à 40, le plan de déséquilibre maximum n'est pas le dupliqué de N_2, $N_3 = \{10, 0, 0, 10, 0, 0, 10 \ldots 0, 10\}$ de mesure $\mu = \frac{10}{19}$ mais le plan $N_4 = \{20, 0, \ldots 0, 20, 0 \ldots 0\}$ de mesure nulle.

2 - Tietjen (56) a proposé pour un modèle très proche du notre $\frac{1}{\mu}$ comme indice du déséquilibre mais sans justification particulière.

.../..

3 - Dans le cas général où $n_{10} \neq n_{20}$, μ n'est plus une borne inférieure de l'efficacité qui n'est plus nécessairement inférieure à 1. Nous garderons néanmoins cette mesure comme indice du déséquilibre, à moins que n_{10} et n_{20} ne soient trop différents.

VI.3. - Stratégie de comparaison

A distance finie, c'est à dire pour un nombre de blocs non nécessairement grand, on avait au départ trois tests approchés concurrents : le test U^2, le quasi-F test et le test $T^2(\hat{\rho})$ proposé au chapitre III. Les autres tests du Chapitre III n'ont pas fait l'objet de cette étude.

La comparaison se faisant par simulation, le quasi-F test pose des problèmes puisque les degrés de liberté de la loi approchée de ce test sont fonction des variables simulées. Ainsi si on simule mille fois par exemple la variable U_Q^2, on aura mille degrés de libertés non nécéssairement égaux. On peut prendre comme degré de liberté global la partie entière de la moyenne des mille degrés de liberté, qu'on notera $\hat{f}'_0$ et comparer au vue de l'échantillon simulé la loi de U_Q^2 et celle d'un F $(1, \hat{f}'_0)$.

En pratique pour les simulations faites, on n'a pas constaté de grandes différences sur les valeurs, des degrés de libertés.

Tietjen G.L. (56) a comparé par simulation les tests U^2 et U_Q^2 pour un modèle légèrement différent (modèle aléatoire où on teste $\sigma_t^2 = 0$ au lieu de $t_1 = t_2$, les tests sont les mêmes que pour notre modèle mais leur puissance est sûrement différente et avec un choix de plans très limité (C.H. Goldsmith and D.W. Gaylor (21)). Il aboutit à la conclusion que l'on ne gagne pas à faire le quasi-F test au lieu du test F approché classique.

Pour chaque plan la variable Y a été simulée mille fois et les statistiques choisies calculées. On disposait ainsi pour chaque statistique d'un mille échantillon, au cours duquel on devait juger la valeur de l'approximation. Le critère choisi pour juger de cette approximation est la statistique de Kolmogorov-Smirnov.

VI.3.1. - Test de Kolmogorov-Smirnov

Soient n variables aléatoires X_3, X_2, ..., X_n indépendantes et distribuées

.../..

identiquement suivant une loi de probabilité continue de fonction de distribution $F(x)$.

La fonction de distribution empirique $F_n(x)$ de l'échantillon $(x_1, \ldots, x_n)$ correspondant est une fonction en escalier ainsi définie :

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ \frac{k}{n} & x_k \leq x < x_{k+1} \\ 1 & x_n < x \end{cases}$$

$$k = 1, \ldots, n - 1$$

La déviation maximum D_n en valeur absolue entre la distribution empirique F_n et la distribution théorique F s'écrit :

$$D_n = \text{Sup}_{-\infty < x < +\infty} |F_n(x) - F(x)|$$

D_n est une statistique qui a la propriété remarquable d'être distribuée suivant une densité de probabilité indépendante de F (pourvu que F soit continue). La distribution de D_n sous l'hypothèse nulle " $F_n = F$ " est connue et tabulée. On montre que le test de Kolmogorov-Smirnov est dans tous les cas plus puissant que le test Khi-deux classique pour la même hypothèse. Les statistiques calculées n'ont pas été U_F^2, U_Q^2 et $T^2(\hat{\rho})$ mais :

$$U_F = \frac{Y_{1..} - Y_{2..}}{\sqrt{SCB/(m_0 - 2)}} \times \frac{\sqrt{n_{10}\, n_{20}}}{\sqrt{n}}$$

.../..

$$U_Q = \frac{Y_{1..} - Y_{2..}}{\sqrt{MSB'}} \times \sqrt{\frac{n_{10}\, n_{20}}{n}}$$

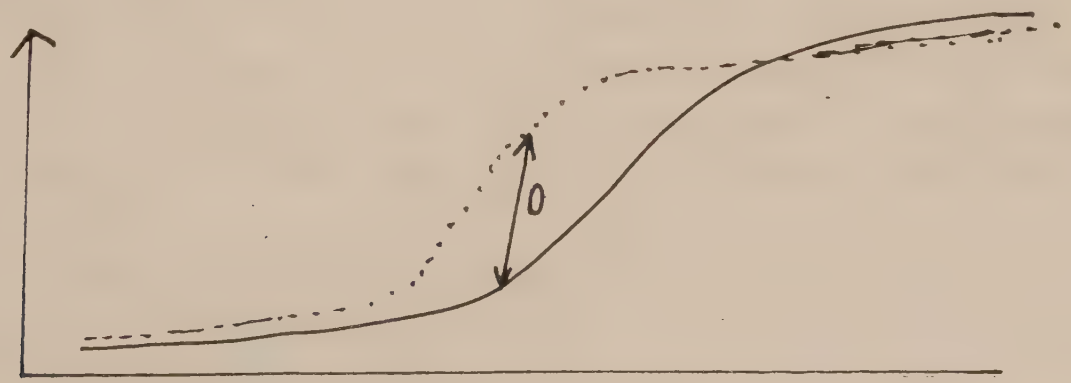
MSB' a été définie au châpitre II.

$$T(\hat{p}) = \frac{\hat{t}_1(\hat{p}) - \hat{t}_2(\hat{p})}{\sqrt{(S_1 + S_2(\hat{p}))/(n-2)}} \sqrt{\frac{\hat{\alpha}_{10}\, \hat{\alpha}_{20}}{\hat{\alpha}_{00}}}$$

et la loi théorique choisie n'est pas un F (1, m_0 - 2) (ou F (1, $\hat{f}_0$)) mais un Student a m_0 - 2 degrés de liberté (ou $\hat{f}_0$ degrés de liberté dans le cas de U_Q).

VI. 3.2. - Comparaison des risques de première espèce

Le test de Kolmogorov-Smirnov étant un test qui compare les deux distributions empiriques et théoriques globalement ce qui peut être sévère si l'on ne s'intéresse qu'au comportement de nos statistiques pour des niveaux pratiques (1 % et 5 % par exemple). Ainsi schématiquement si les distributions empiriques et théoriques sont ainsi :



.../..

le test de Kolmogorov-Smirnov rejettera, alors que pour les niveaux qui nous intéressent en pratique, les deux distributions sont équivalentes. On a donc, en plus du calcul de la statistique D_n de Kolmogorov-Smirnov, comparé des pourcentages empiriques à des pourcentages théoriques (de 5 pour cent, qui est souvent utilisé en pratique).

VI.3.3. - Comparaison des tests par leur puissance

Dans une seconde étape, on s'est intéressé à la puissance des deux tests. On s'est fixé comme niveau cinq pour cent. La puissance d'un test sera donc dans notre cas la probabilité que sous l'hypothèse non nulle, la statistique du test dépasse la valeur $t_{5\,\%}$. Nous estimons cette probabilité au vue de l'échantillon simulé. Pour chaque plan et chaque valeur de ρ choisi, trois points de la courbe de puissances correspondant à trois valeurs normalisées de la différence entre traitements ont été choisies.

$t_1 - t_2 = 0.25$; $t_1 - t_2 = 0.5$; et $t_1 - t_2 = 1$

VI.3.4. - Choix des plans

On a choisi au départ dix plans pour lesquels le nombre de blocs par groupe a été fixé arbitrairement à 10. Cinq plans sont à effectifs réduits ($\bar{r} \approx 3$), les cinq autres à effectifs voisins de 10. Le tableau 1 donne le détail des effectifs des plans et les valeurs de $\bar{r}$, μ et ν. Pour chaque groupe de plans le déséquilibre s'échelonne de plans presque équilibré à plans très déséquilibrés. Pour chaque plans trois valeurs de ρ ont été choisis : 0.25, 0.50 et 1. En pratique, dans la plupart des applications biologiques et épidémiologiques, les valeurs de ρ ne dépassent pas 1,5 (A. Donner, N. Birkett et C. Buck, (18)) et D.S. Falconer (20)). Ensuite pour $\rho = 0.5$, on a modifié le nombre de blocs par groupe et porté successivement à 5 et à 20, l'effectif total restant constant ($n = 200$).

Le tableau 2 donne les détails des effectifs de ces plans et les valeurs de $\bar{r}$, μ et ν. De même que précédemment pour chaque nombre de blocs, 2 plans de déséquilibre différent ont été choisis.

.../..

VI.3.5. - Simulations

Un programme standard a été utilisé pour générer la variable Y. Le principe est basé sur la génération d'un échantillon de la loi uniforme (J.P. Asselin de Beauville (6)) et l'application du théorème central limite pour avoir un mille échantillon de la loi normale (Bibliothèque des sous-programmes statistiques de la CII).

VI.4 - Résultats des simulations

VI.4.1. - Exactitude des tests

VI.4.1.1. - Statistique de Kolmogorov-Smirnov

Le tableau 3 donne les valeurs de D_n pour les dix premiers plans simulés et pour T, U_F et U_Q. Remarquons que pour U_Q ces valeurs ne sont qu'indicatives et ce pour deux raisons :

1) - $\tilde{f}'$ les degrés de liberté de la loi approchée de U_Q varient avec les simulations. Pour mille simulations, on aura mille valeurs de $\tilde{f}'$ différentes. La comparaison de la loi de U_Q à celle d'un Student au vue de l'échantillon pose donc des problèmes. On a pris comme degrés de liberté global pour la loi théorique de U_Q la moyenne des mille degrés de liberté arrondis au point le plus proche.

2) - MSB' peut prendre des valeurs négatives. MSB' = $\hat{\sigma}^2 + k_1 \hat{\sigma}_b^2$ et $\hat{\sigma}_b^2$ n'est pas permissible. On aurait du prendre plutôt MSB" = $\hat{\sigma}^2 + k_1 \tilde{\sigma}_b^2$ avec $\tilde{\sigma}_b^2 = \sup(0, \hat{\sigma}_b^2)$. Le risque de première espèce effectif n'en serait que diminué. Mais on ne peut rien dire du comportement global.

On constate que pour les plans peu déséquilibrés les trois tests sont équivalents et assez proches de la loi théorique proposée. Par contre, pour des plans très déséquilibrés U_F s'éloigne notablement de la loi d'un Student à $m_0 - 2$ degrés de liberté alors que U_Q et T sont assez stables. Pour donner un ordre de grandeur, rappelons que le test de Kolmogorov-Smirnov de niveau 5 % indique dans ce cas une valeur limite pour D égale à 0.043. Le tableau 4 indique les mêmes valeurs de D_n mais uniquement pour $\rho = 0.5$ et pour les statistiques U_F et T. On

.../..

retrouve la même tendance que pour les dix premiers plans : un mauvais comportement de F avec le déséquilibre, alors que T est stable avec ce même déséquilibre. On remarque par contre que la seule limitation de T semble être le faible nombre de blocs.

VI.4.1.2. - Risque de première espèce

Le tableau 5 donne le risque de première espèce empirique quand le risque espéré est de 5 % et quand la loi théorique utilisée est un Student à 18 degrés de liberté. Le tableau 6 nous donne le risque empirique quand la loi théorique est une loi normale.

Ces risques n'ont été calculés que pour les plans 1 à 5. On retrouve le mauvais comportement de U_F quand le plan est très déséquilibré. L'approximation par une loi normale semble être mauvaise globalement pour les trois tests si le plan est très déséquilibré, avec toujours un net écart pour U_F du risque espéré. Notons que pour un mille échantillon, un intervalle de pari à 5 % pour le risque espéré est $[0,036 ; 0,064]$.

Le tableau 7 donne les risques empiriques pour les plans 11 à 14. On retrouve le bon comportement du test T et ses propriétés assymptotiques. Ainsi pour le plan 14 très déséquilibré, le risque empirique n'est pas très différent du risque espéré. Pour les plans à faible nombre de blocs, on remarque un bon risque de première espèce (pour une loi théorique de Student) alors que pour Kolmogorov-Smirnov, T (pour les plans 11 et 12) était mauvais. U_F est équivalent à T pour les plans peu déséquilibrés mais dés que le plan est assez déséquilibré le risque réel est trop grand.

VI.4.2. - Puissance du test T

Le tableau 10 donne les résultats des simulations de la puissance du test T et pour quelques plans peu déséquilibrés la puissance du test U_F. Pour pouvoir étudier la variation de la puissance de T en fonction du nombre de blocs, on a repris les plans 11, 12, 13, 14 et les plans 6, 9 et 10 (où m = 10 et où le déséquilibre est faible, moyen et fort réciproquement).

.../..

Le tableau 8 reprend les caractéristiques de ces plans en les renumérotant. Le tableau 9 redonne les valeurs de D_n concernant l'exactitude. On remarque que quand le déséquilibre est faible, les puissances des deux tests sont très semblables. La puissance de T ne semble pas être influencée par le degré de déséquilibre du plan. La puissance de T décroit avec ρ (tableau 10) ce qui était prévisible.

La figure 1, montre les variations de la fonction de puissance du test T pour $\rho = 0.5$ et n a peu près égal à 200, en fonction du nombre de blocs. On constate que pour chaque valeur de m, la valeur empirique de la puissance du test T est conforme à la valeur théorique de la puissance d'un test de Student exact du plan équilibré équivalent (valeur que l'on a calculée grâce à Scheffe (52).

TABLEAU 1

Caractéristiques des plans 1 à 10
(nombre de blocs par groupe : 10)

Plan N°	Effectifs du groupe 1	Effectifs du groupe 2	$\bar{r}$	μ	ν
1	3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 2; 2;	3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 2; 2; 2;	2,75	0,974	0,976
2	3; 3; 3; 3; 3; 2; 2; 2; 1; 4;	3; 3; 3; 3; 2; 2; 2; 2; 4; 1	2,55	0,900	0.910
3	3; 3; 3; 2; 2; 1; 1; 4; 4; 5	3; 3; 3; 2; 2; 2; 2; 4; 4; 5	2.90	0.852	0.870
4	4; 7; 7; 3; 3; 2; 1; 1; 1; 1;	8; 7; 3; 3; 2; 2; 2; 1; 1; 1	3.00	0.588	0.629
5	1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 10; 12	1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 8; 14	3.00	0.274	0.346
6	10; 10; 10; 10; 10; 10; 10; 10; 9; 9;	10; 10; 10; 10; 9; 9; 9; 9; 9; 9	9.60	0.998	0.998
7	10; 10; 10; 10; 9; 9; 9; 9; 11; 12	10; 10; 10; 10; 9; 9; 9; 8; 8; 11	9.40	0.971	0.990
8	6; 6; 6; 11; 11; 11; 13; 7; 8; 12	8; 7; 5; 7; 10; 11; 13; 8; 6; 8	8.75	0.920	0.925
9	6; 7; 21; 17; 25; 10; 21; 21; 4; 11	7; 10; 18; 14; 7; 4; 4; 22; 4; 8	9.40	0.765	0.625
10	40; 40; 10; 2; 2; 2; 1; 1; 1; 1;	40; 20; 20; 10; 5; 1; 1; 1; 1; 1;	10	0.269	0.345

TABLEAU 2

Caractéristiques des plans 11 à 14 (nombre de blocs par groupe 5 et 20)

Plan N°	Effectifs du groupe 1	Effectifs du groupe 2	$\bar{r}$	μ	ν
11	20 ; 20 ; 20 ; 18 ; 22	20 ; 20 ; 18 ; 26 ; 16	20	0.966	0.973
12	10 ; 10 ; 10 ; 20 ; 50	10 ; 10 ; 10 ; 15 ; 55	20	0.491	0.553
13	5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 4 4 ; 4 ; 6 ; 6 ; 6	5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 5 ; 4 ; 4 ; 6 ; 6	5	0.989	0.990
14	1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 10 ; 10 ; 10 ; 20 ; 30	1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 12 ; 12 ; 12 ; 18 ; 25	5	0.294	0.329

TABLEAU 3

Valeurs de D_n (Kolmogorov-Smirnov)

ρ	0.25			0.5			1		
	T	U_F	U_Q	T	U_F	U_Q	T	U_F	U_Q
1	0.017	0.018	0.013	0.024	0.025	0.025	0.018	0.021	0.023
2	0.030	0.025	0.029	0.022	0.030	0.036	0.017	0.019	0.026
3	0.025	0.030	0.024	0.020	0.021	0.022	0.024	0.034	0.021
4	0.033	0.021	★	0.030	0.033	0.026	0.032	0.043	0.030
5	0.010	0.083	★	0.040	0.134	★	0.027	0.131	★
6	0.031	0.028	0.028	0.020	0.023	0.023	0.038	0.037	0.040
7	0.010	0.010	0.012	0.016	0.017	0.017	0.023	0.015	0.018
8	0.039	0.041	0.033	0.025	0.032	0.027	0.025	0.025	0.023
9	0.036	0.061	0.036	0.021	0.045	0.026	0.034	0.048	0.024
10	0.044	0.035	★	0.033	0.134	★	0.045	0.145	0.027

TABLEAU 4

	U_F	T
11	0.048	0.047
12	0.152	0.054
13	0.021	0.027
14	0.127	0.026

TABLEAU 5

Loi approchée Student (en %)

ρ	0.25			0.50			1.00		
	T	U_F	U_Q	T	U_F	U_Q	T	U_F	U_Q
1	6.1	6.2	6.1	4.9	4.4	4.3	5.4	4.6	4.4
2	5.0	4.3	3.8	5.7	5.5	4.3	4.1	4.1	3.5
3	4.6	4.8	4.1	5.2	5.9	4.5	5.3	7.0	4.6
4	5.8	8.2	5.6	4.2	7.6	4.1	5.9	10.4	5.0
5	6.3	12.4	9.5*	7.1	19.1	6.7	6.0	24.0	4.6*

TABLEAU 6

Loi approchée normale (en %)

ρ	0.25			0.50			1.00		
	T	U_F	U_Q	T	U_F	U_Q	T	U_F	U_Q
1	8.2	7.9	7.8	6.3	5.9	5.3	5.9	6.8	6.6
2	6.2	6.1	5.8	6.8	7.1	6.6	5.5	5.6	4.9
3	6.3	6.5	5.9	6.9	7.5	7.0	7.4	9.0	7.1
4	7.4	10.6	8.3	5.6	10.2	6.5	7.8	12.7	6.3
5	8.4	15.3	13.9	8.7	22.2	10.9	7.9	26.4	7.9*

TABLEAU 7

Risques de premières espèces

en %

$p = 0.5$, loi théorique : Normale

Plans	U_F	T
11	9.4	10.3
12	16.7	8.3
13	5.4	5.5
14	22.8	7.2

loi théorique : Student

plans	U_F	T
11	5.6	5.7
12	11.2	4.7
13	5.4	5.5
14	22.8	7.2.

TABLEAU 8 : Plans

Plan n°	m	n_{1j}	n_{2j}	μ
1	5	20 20 20 18 22	20 20 18 26 16	0.966
2	5	10 10 10 20 50	10 10 10 15 55	0.491
3	10	10 10 10 10 10 10 10 10 9 9	10 10 10 10 9 9 9 9 9 9	0.998
4	10	6 7 21 17 25 10 21 21 4 11	7 10 18 14 7 4 4 4 22 8	0.765
5	10	40 40 10 2 2 2 1 1 1 1	40 20 20 10 5 1 1 1 1 1	0.292
6	20	5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 4 4 4 6 6 6	5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 4 4 6 6	0.989
7	20	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 10 10 10 20 30	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 12 12 12 18 25	0.294

TABLEAU 9 : Valeurs de D

		m = 5		m = 10		m = 20		
U	ρ	1	2	3	4	5	6	7
U	0.25			0.028	0.061	0.134		
T				0.030	0.036	0.033		
U	0.50	0.049	0.152	0.023	0.045	0.145	0.021	0.127
T		0.047	0.054	0.020	0.021	0.045	0.027	0.026
U	1.00			0.037	0.048	0.169		
T				0.038	0.034	0.022		

TABLEAU 10 : Puissance des deux tests

Probabilité de rejeter Ho pour T (à gauche) et U (à droite) en fonction de la différence entre les traitements

Plan N°	ρ	$t_1 - t_2 = 0.25$		$t_1 - t_2 = 0.50$		$t_1 - t_2 = 1.00$	
1	0.50	0.045	0.045	0.170	0.163	0.485	0.475
2	0.50	0.065		0.175		0.430	
3	0.25	0.142	0.142	0.405	0.404	0.952	0.952
	0.50	0.124	0.122	0.279	0.278	0.775	0.779
	1.00	0.064	0.067	0.168	0.174	0.504	0.507
4	0.25	0.160		0.440		0.930	
	0.50	0.125		0.285		0.770	
	1.00	0.105		0.165		0.520	
5	0.25	0.145		0.325		0.840	
	0.50	0.110		0.285		0.685	
	1.00	0.060		0.160		0.505	
6	0.50	0.120	0.120	0.515	0.520	0.960	0.965
7	0.50	0.125		0.340		0.910	

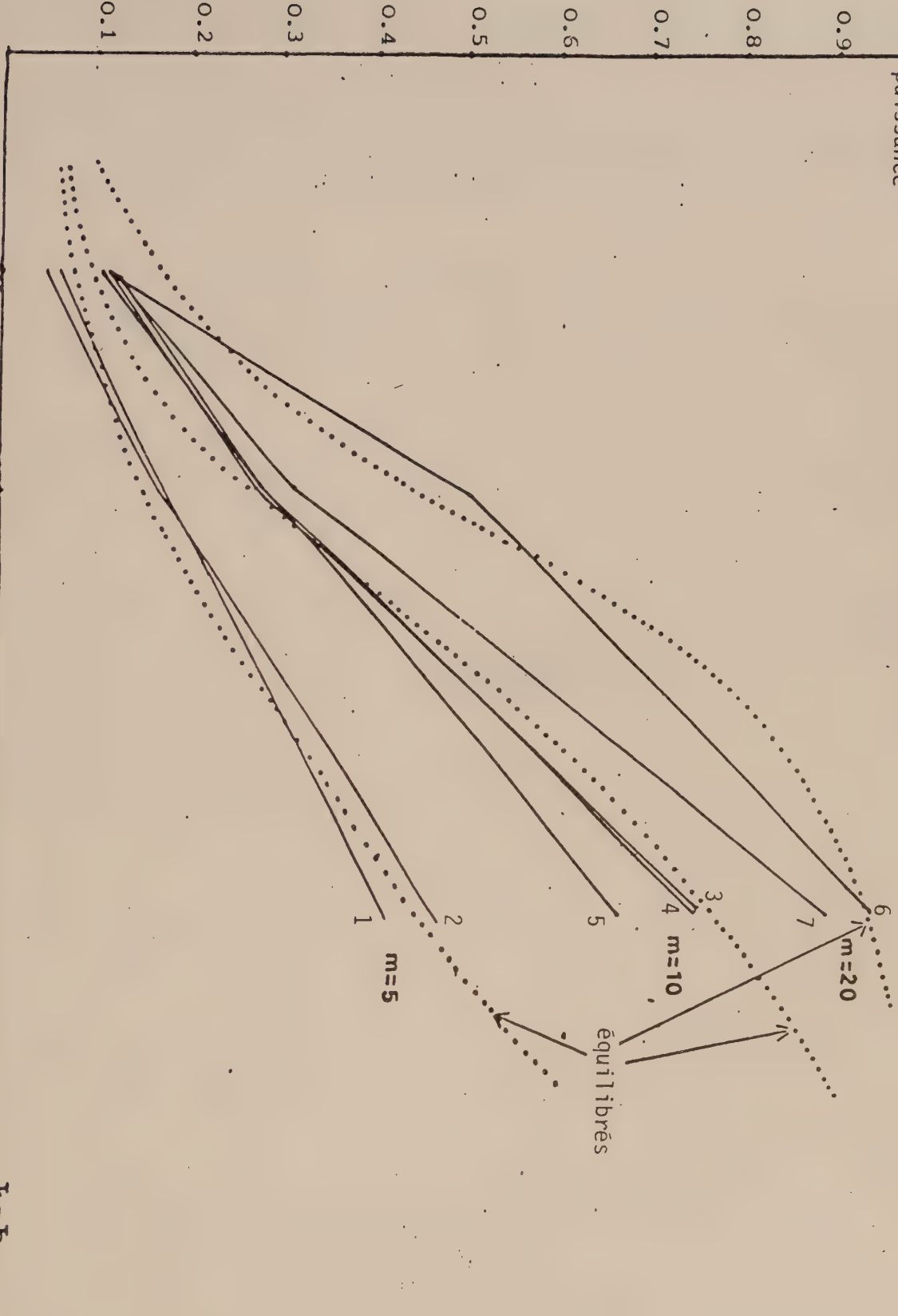


Figure 1 - Puissance du test T pour les divers plans à 7 traitements

VII - BIBLIOGRAPHIE

1) AHRENS H.

Minque and Anova estimator for one-way classification - A risk comparison
Biom. J., Vol. 20, n°6, 535-556, 1978

2) AHRENS H. and PINCUS R.

On two measures of unbalancedness in a one way model and their relation to efficiency.
Biom. J., Vol. 23, n°3, 227-235, 1981

3) AHRENS H. and KLEFFE J. and TENZLER R.

Mean square error comparison for MINQUE, ANOVA and two alternative estimators under the unbalanced one way random model.
Biom. J., Vol. 23, n°4, 323-342, 1981

4) ANDERSON R.L. and CRUMP P.P.

Comparisons of designs and estimation procedures for estimating parameters in a two stage nested process.
Technometrics, Vol. 9, n°4, 1967

5) ARVESEN J.N. and LAYARD M.W.J.

Assymptotically robust test in unbalanced variance component models.
The Annals of Statistics, Vol.3, n°5, 1122-1134, 1975

6) ASSELIN DE BEAUVILLE J.P.

Les sous programmes usuels de simulation statistique.
Revue de Statistique appliquée, Vol. XXII, n°4, 57, 1974

7) BIRKES D., SEELY J. and AZZAM A.M.

An efficient estimator of the mean in a two stage nested model.
Technometrics, Vol. 23, n°2, 1981

8) BROWN K.G.

Assymptotic behavior of Minque. Type estimators of variance components.
The annals of statistics, Vol.4, n°4, 746-754, 1976

9) BARRA J.R.

Notions fondamentales de statistique-mathématiques.
Dunod, Paris, 1971

10) CAMBIEN F., RICHARD J.L., JACQUESON A. et DUCIMETIERE P.

L'essai Parisien de prévention cardio-vasculaire.
Revue d'Epidémiologie et de Santé Publique, 1981

.../..

11) COCHRAN W.G. and CARROLL S.P.

A sampling inverstigation of the efficiency of weighting inversely as the estimated variances.
Biometrics Vol. 9, n°4, 447-459, 1953

12) COCHRAN W.G.

The combination of estimates from different experiments.
Biometrics 10, 101-125, 1954

13) CORBEIL et SEARLE

A comparison of variance components estimation.
Biometrics 32, 779-791, 1976

14) CORNFIELD J.

Randomization by group : a formal analysis.
Am. J. Epidem., 108, 100, 2, 1978

15) COURSOL J.

Techniques statistiques des modèles linéaires. 1- Aspects théoriques.
Les cours du C.I.M.P.A. 1981

16) CRAMER H.

Mathematical methods of statistics.
Princeton University Press. 8ème édition, 1958

17) DAVENPORT J.M. and WEBSTER J.T.

Type I error and power of a test involving a Satterthwaite's approximate F-statistic.
Technometrics, Vol. 14, n°3, 1972

18) DONNER A., BIRKETT N. and BUCK C.

Randomization by Cluster. Sample size requirements and analysis.
American Journal of Epidemiology, Vol. 114, n°6, 306, 1981

19) EISEN

The quasi F-test for an unnested fixed factor in an unbalanced hierarchical design with a mixed model.
Biometrics 22, 112, 1966

20) FALCONER D.S.

Introduction to quantitative genetics.
New-York, Ronald Press, 1960

.../..

21) GOLDSMITH C.H. and GAYLOR D.W.

Three stage nested design for estimating variance components.
Technometrics 12, 487,

22) GRAYBILL F.A.

An introduction to linear statistical models I
Mc Graw-Hill, New-York, 1961

23) GAYLOR and HAPPER

Estimating the degrees of freedom for linear combinations of mean-squares by Satterthwaite's formula.
Technometrics 11, 691,

24) HARTLEY and RAO J.N.K.

Maximum likelihood estimation for the mixed analysis of variance model.
Biometrika, n°5, 1967

25) HARVILLE D.A.

Maximum likelihood approaches to variance components estimation and to related problems.
JASA 72, 1977

26) HENDERSON S.R.

Estimation of variance and covariance components.
Biometrics 9, 128, 1953

27) HESS J.L.

Sensitivity of Minque with respect to a priori weights.
Biometrics 35, 645-649, 1979

28) HOCKING R.R. and KUTNER M.H.

Some analytical and numerical comparisons of estimators for the mixed A.O.V.
Biometrics 31, 19-27, 1975

29) HOEFFDING W.

A class of statistics with assymptotically normal distribution.
Annals of mathematicals statistics, Vol. 19, 253-325, 1948

30) HOWE R.B. and MYER R.H.

An alternative to Satterthwaite's test involving positive linear combinations of variance components.
JASA 65, 404, 1970

.../..

31) KOCH G.G.

A general approach to the estimation of variance components.
Technometrics 9, n°1, 1967

32) KOCH G.G.

A procedure to estimate the population mean in a random effects models.
Technometrics, Vol. 9, n°4, 1967

33) LAMOTTE L.R.

Invariant quadratic estimators in the random one way Anova model.
Biometrics 32, 793-804, 1976

34) LEVY P.S.

Combining independant estimators. An emperical sampling study.
Technometrics, Vol. 12, n°1, 162-165, 1970

35) LINDSAY B.G.

Nuisance parameters, mixture models and the efficiency of partial likelihood estimators.
Proceeding of the Lond. Phil. Soc., Vol. 296 A1427, 639, 1980

36) LINNIK

Leçons sur les problèmes de statistiques analytiques.
Gauthier-Villar, Paris, 1967

37) LOW L.Y.

Some properties of variance component estimators in the two way classification.
Technometrics 18, n°1, 1976

38) MASSON J.P.

Revue critique des principales méthodes d'estimation des composantes de la variance sur modèles mixtes.
In Biometrie et Génétique, 68-79 - J.M. Legay et al., Ed., 1980

39a) MESBAH M. et DUCIMETIERE P.

Recherche d'un test simple de comparaison de deux traitements dans un modèle hiérarchique mixte déséquilibré.
In Biometrie et Epidémiologie n°5, Ed. J.M. Legay et R. Tomassone, Société Française de Biométrie, 1981

.../..

39b) MESBAH M. et DUCIMETIERE P.

Un test simple de comparaison de deux traitements dans un modèle hiérarchique mixte déséquilibré.
A paraitre dans la " Revue de Statistique Appliquée " 1982

40) MOUSSA J.

L'estimation optimale des composantes de la variance dans les modèles mixtes. Une étude des méthodes de C.R. RAO
Thèse de 3ème cycle, Orsay, 1973

41) MOUSSA J.

Quelques résultats relatifs aux méthodes de C.R. RAO pour les modèles linéaires mixtes.
Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, T. 279, Série A, 14 Oct. 1974

42) MILLER J.J.

Assymptotic properties of maximum likelihood estimates in the mixed models of the analysis of variance.
The annals of statistics, Vol. 5, n°4, 746-762, 1977

43) PAGUROVA V.J.

A test for comparison of mean values in two normal samples.
Selected Trans. in Math. Statist. and Probability, Vol. 14, 1978

44) RAO C.R.

Estimation of variance and covariance components Minque theory.
Journal of multivariate analysis 1, 257-275, 1971

45) RAO C.R.

Minimum variance quadratic unbiased estimation of variance components.
Journal of multivariate analysis 1, 445-456, 1971

46) RAO C.R.

Estimation of variance components in linear models.
JASA, Vol. 67, n°337, 1972

47) RAO, C.R.

Linear statistical inference and its applications.
Second Edition, John Wiley, New-York, 1973

.../..

48) RAO J.N.K.

On the estimation of heteroscedastic variances.
Biometrics 29, 11-24, 1973

49) RAO J.N.K.

Estimating the common mean of possibly different normal populations : a simulation study.
JASA 73, 447-453, 1980

50) RAO J.N.K. and SUBRAHMANIAM K.

Combining independant estimators and estimation in linear regression with unequal variances.
Biometrics 27, 971-990, 1971

51) RAO S.R.S., KAPLAN J. and COCHRAN W.G.

Estimators of the one way random effects model with unequal error variances
JASA 76, n°373, 89-97, 1981

52) SCHEFFE

The analysis of variance.
John Wiley : New York 1959

53) SEARLE S.R.

Large sample variances of M.L.E. of variances components using unbalanced data.
Biometrics 26, n°3, 505-524, 1970

54) SEARLE S.R.

Topics in variance component estimation.
Biometrics 27, n°1, 1-76, 1971

55) SERFLING R.J.

Approximation theorem of Math. Statist.
John Wiley 1981

56) TIETJEN G.L.

Exact and approximate tests for unbalanced random effects designs.
Biometrics 30, 573-581, 1974

57) THOMPSON W.O. and ANDERSON R.L.

A comparison of designs and estimators for the two stage nested random model.
Technometrics, Vol. 17, n°1, Fév. 1975

.../..

58) THOMSEN I.B.

Testing hypothesis in unbalanced variances components models for two way layouts.
Annals of Statistics, Vol. 3, n°1, 257-265, 1975

59) WALD A.

Test of statistical hypothesis concerning several parameters when the number of observations is large.
Trans. Am. Math. Soc. 54, 426-482, 1943

60) WEILER H. and CULPIN D.

On the weighted means.
Technometrics, Vol. 12, n°4, 757-773, 1970.